MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS DEFORMABLES

Première Partie : Généralités sur les milieux continus déformables.

TABLE DES MATIERES

++++++++++++++
++++++++
+

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS DEFORMABLES

Première partie : GENERALITES SUR LES MILIEUX CONTINUS DEFORMABLES

INTRODUCTION

Tous les matériaux soumis à des forces extérieures se déforment. Alors que la mécanique rationnelle n'étudie que le mouvement d'ensemble des corps considérés comme indéformables ("solide parfait"), la mécanique des milieux continus déformables a pour but de calculer les déformations dues aux forces extérieures. Ce calcul ne peut être réalisé qu'à partir de l'observation expérimentale et, en ce sens, on peut dire que la mécánique des milieux déformables est une branche de la physique, par opposition à la mécanique rationnelle. Toutefois, cette classification ne doit pas être considérée dans l'absolu et nous dirons simplement que nous sommes à la frontière de la mécanique et de la physique. D'ailleurs, ceci est bien illustré par le fait que, dans le cas des solides réels, on peut considérer que les deux phénomènes mouvement et déformation sont simplement superposés alors que pour les corps liquides ou gazeux déplacement et déformation ne peuvent plus être séparés distinctement.
Ainsi la mécanique des milieux continus déformables comprend deux branches distinctes : - la mécanique des solides déformables - la mécanique des fluides.

L'observation et l'expérience jouent un rôle primordial en mécanique des milieux continus. Le fondement physique des calculs théoriques doit être clairement établi et si la théorie est nécessaire pour coordonner l'ensemble des faits expérimentaux, il est indispensable de vérifier les calculs par l'expérience. "L'expérience suggère et contrôle" (J. Mandel).

Dans ce cours, nous désirons présenter aux élèves-ingénieurs les théories générales de la mécanique des milieux continus (première partie) et les appliquer à la résistance des matériaux (deuxième partie).

Nous admettrons par la suite que l'étudiant est familiarisé avec le calcul tensoriel. Dans le cas contraire, l'étudiant se reportera au premier chapitre du cours consacré à la notion de tenseur.

ELASTICITE - MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

CHAPITRE I - Rappels - NOTION DE TENSEUR

Introduction :

Il est parfaitement possible mais peu commode de présenter la théorie de l'élasticité sans faire appel aux tenseurs.

Dans le cadre de ce cours, nous ne donnerons pas (essentiellement pour des raisons de temps) de définition rigoureuse et générale de l'être mathématique appelé tenseur.
Nous nous contenterons de donner le sens physique des tenseurs dans le cas particulier de l'espace euclidien à trois dimensions en axes cartésiens.
Dans le cas de la Physique, la notion de tenseur est intimement liée à la définition de la grandeur représentée et à la façon dont cette grandeur se transforme dans un changement de coordonnées.

I.1.- Scalaires, vecteurs, tenseurs de rang 2

1°) Scalaires : ou tenseur d'ordre 0

Un scalaire est défini par un seul nombre et indépendant des axes de référence (donc indépendant de toute notion d'orientation). Citons parmi les grandeurs scalaires : masse, densité, température, volume.

2°) Vecteurs : Par opposition aux scalaires, il existe des grandeurs physiques très différentes, les vecteurs, qui sont inséparables de la notion de direction : c'est le cas par exemple d'une force ou de l'intensité du champ électrique, le grandient de température en un point.

Nous pouvons désigner un vecteur par E, $\overline{E}$, $\vec{E}$

$\uparrow$

E représentant l'intensité du vecteur. Nous choisirons cette convention.

Représentation d'un vecteur :

Choisissons un trièdre trirectangle Ox_1, Ox_2, Ox_3. Les composantes du vecteur sur les axes (c'est-à-dire les projections du vecteur sur les axes) représentent le vecteur en intensité et directions.

$$\overline{E} \left| \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \right. \qquad \text{ou} \qquad \overline{E} = \left[E_1, E_2, E_3 \right]$$

Un vecteur est un tenseur de rang 1 (cf. suite)

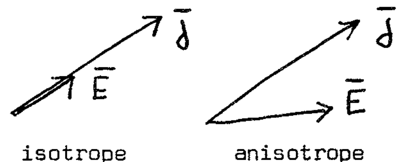
Nous supposerons que le lecteur est familiarisé avec l'analyse vectorielle.

3°) Tenseur de rang 2 (ou d'ordre 2)

Nous pouvons généraliser la notion de vecteur. Appliquons un champ électrique, représenté par le vecteur $\overline{E}$, sur un conducteur. Il se produit un courant électrique.

La densité de courant (intensité par unité de surface perpendiculaire au courant) est représentée par le vecteur $\vec{j}$. Si le conducteur est isotrope et si la loi d'Ohm s'applique, on a

$$\overline{j} = \sigma \overline{E} \qquad (1)$$



isotrope anisotrope

σ = conductivité.

Si dans le système d'axes Ox_1, Ox_2, Ox_3 (1, 2, 3)

$$j = \left[j_1, j_2, j_3 \right] \quad \text{et} \quad \overline{E} = \left[E_1, E_2, E_3 \right]$$

On a $j_1 = \sigma E_1$ $\qquad j_2 = \sigma E_2$ $\qquad j_3 = \sigma E_3$ (2)

chaque composante de $\overline{j}$ est proportionnelle à la composante correspondante de $\overline{E}$.

Par contre, si le conducteur est anisotrope (cas d'un cristal) la relation entre les composantes de $\overline{j}$ et de $\overline{E}$ n'a plus la forme simple de l'équation (2).

Remarque : Les cristaux du système cubique forment un groupe particulier dont la conductivité est isotrope.
L'équation (2) est remplacée, pour les cristaux, par les relations (3)

$$\left.\begin{aligned} j_1 &= \sigma_{11} E_1 + \sigma_{12} E_2 + \sigma_{13} E_3 \\ j_2 &= \sigma_{21} E_1 + \sigma_{22} E_2 + \sigma_{23} E_3 \\ j_3 &= \sigma_{31} E_1 + \sigma_{32} E_2 + \sigma_{33} E_3 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

σ_{11}, σ_{12}... étant des constantes.

Chaque composante de $\bar{j}$ est liée par une relation linéaire aux trois composantes de $\bar{E}$ et $\bar{J}$ n'a plus la même direction que $\bar{E}$. On peut donner aux coefficients σ_{ij} de (3) une signification physique.

Si le champ est appliqué parallèlement à l'axe 1.

$\bar{E} = [E_1 , 0 , 0]$ et les équations (3) deviennent (4) :

$$\left.\begin{aligned} j_1 &= \sigma_{11} E_1 \\ j_2 &= \sigma_{21} E_1 \\ j_3 &= \sigma_{31} E_1 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Il y a donc des composantes de $\bar{j}$ non seulement sur l'axe 1 mais aussi sur les autres axes : la composante dans la direction du champ est donnée par σ_{11} et les deux composantes transversales par σ_{21} et σ_{31}. De façon semblable, σ_{23} mesure la composante de $\bar{j}$ parallèle à x_2 quand le champ est parallèle à x_3.

Ainsi la conductivité d'un cristal est une propriété qui est décrite par neuf coefficients, que l'on peut écrire sous la forme d'un tableau carré, entre deux crochets, qui symbolise un tenseur de rang 2 :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \rightarrow [\sigma_{ij}] \quad (5)$$

ligne colonne

σ_{ij} sont les composantes du tenseur.

Ainsi, nous avons introduit trois sortes de quantités :

- tenseur de rang zéro (scalaire) représenté par un seul nombre et indépendant de tout système de référence.
- tenseur de rang 1 (vecteur) caractérisé par trois nombres ou composantes qui sont associés à un système d'axes de référence.
- tenseur de rang 2 caractérisé par 9 nombres ou composantes dont chacun est associé à deux axes (pris dans un ordre déterminé).

La notation introduite traduit bien ces distinctions : scalaire s'écrit sans indice, les composantes d'un vecteur avec 1 indice, celles d'un tenseur de rang 2 avec deux indices. Le nombre des indices donne le rang du tenseur

D'une façon générale, si une propriété T lie deux vecteurs $\overline{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et $\overline{q} = (q_1, q_2, q_3)$ de telle sorte que :

$$\begin{aligned} p_1 &= T_{11} q_1 + T_{12} q_2 + T_{13} q_3 \\ p_2 &= T_{21} q_1 + T_{22} q_2 + T_{23} q_3 \\ p_3 &= T_{31} q_1 + T_{32} q_2 + T_{33} q_3 \end{aligned} \quad (6)$$

T_{ij}, étant des constantes, on dit que T_{ij} représente un tenseur de rang deux.
Un grand nombre de propriétés, en physique, font appel à des tenseurs de rang deux : exemple : conductivité électrique, thermique, perméabilité etc...

4°) Notation des indices muets

Il faut simplifier les notations. Les équations (6) peuvent s'écrire :

$$p_i = \sum_{j=1}^{3} T_{ij} q_j \quad (i = 1,2,3) \quad (7)$$

On supprime le signe Σ

$$p_i = T_{ij}\, q_j \quad (i,j = 1, 2, 3) \tag{8}$$

en adoptant la convention d'Einstein : quand un indice intervient 2 fois dans un terme monôme, la sommation par rapport à cet indice est sous-entendue.
Ainsi (6), (7) et (8) sont équivalentes. Dans l'équation (8), j est dit indice muet et i indice libre.

p_i : désigne vecteur $\vec{p} = \left[p_1, p_2, p_3\right]$

q_i : désigne vecteur $\vec{q}$

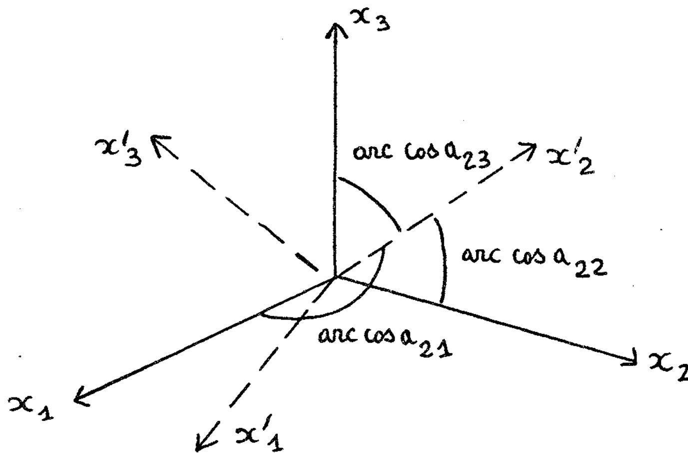
T_{ij} : désigne tenseur $\left[T_{ij}\right]$

I.2.- Transformations

Dans l'équation (6), les valeurs des coefficients T_{ij} dépendent des axes de références choisis. Cependant, ces coefficients représentent toujours la même quantité physique : il doit donc exister une certaine relation entre les coefficients correspondant à des systèmes d'axes différents.
Lorsqu'on change le système de référence, seule change la méthode de représentation de la propriété physique mais la propriété elle-même reste inchangée.
Nous allons déterminer la loi de variation des neuf composantes T_{ij} d'un tenseur lors d'un changement d'axes.

I.2.1.- Transformation des axes

Considérons un changement d'axes c'est-à-dire le passage d'un système d'axes trirectangles à un autre trirectangles ayant la même origine. Sur chaque axe, l'unité de longueur reste la même. Le premier système est x_1, x_2, x_3, le second x'_1, x'_2, x'_3.



Les relations angulaires liant les axes sont données par le tableau suivant (tableau des cos. directeurs).

		Anciens axes		
		x_1	x_2	x_3
	x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Nouveaux	x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
	x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

(9)

Par exemple ; les cos directeurs de x'_2 par rapport à x_1, x_2, x_3 sont a_{21}, a_{22} et a_{23} et les cos directeurs de x_3/ x'_1, x'_2 et x'_3 sont a_{13}, a_{23} et a_{33}. Ainsi:

$$a_{ij} = \cos \text{angle} \left(x'_i, x_j\right)$$

i ↙ nouveaux axes ; j ↘ anciens

Le tableau des a_{ij} est une matrice : désigné symboliquement par $\left(a_{ij}\right)$. Les 9 composantes ne sont pas indépendantes les unes des autres. Vous pourrez d'ailleurs en exercice établir les relations qui existent entre les cos. directeurs a_{ij}.

Exercice n° 1 : Relations entre les cos. directeurs de la matrice (a_{ij}).

Montrer que trois quantités indépendantes suffisent pour définir la transformation d'axes ; cela revient à trouver 6 relations indépendantes entre les 9 coefficients a_{ij}. On considèrera : qu'une longueur unité reste égale à 1 et que 2 axes rectangulaires ont des cos. directeurs nuls. On utilisera le symbole de KRONECKER $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 = i = j \\ 0 \quad i \neq j \end{cases}$

Anciens Axes

		x_1	x_2	x_3
	x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Nouveaux	x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
	x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

(1)

Les 9 coefficients a_{ij} ne sont pas indépendants. Considérons le nombre de degrés de liberté de la transformation : si les axes Ox_1, Ox_2 et Ox_3 sont donnés, il faut 2 angles pour préciser la direction de Ox'_1 (latitude et longitude). Les nouveaux axes peuvent encore tourner autour de Ox'_1 et un autre angle, l'angle de rotation autour de Ox'_1 est nécessaire pour les fixer complètement. Ainsi trois quantités indépendantes suffisent pour définir la transformation : nous devons donc trouver 6 relations indépendantes entre les 9 coefficients a_{ij}.

Chaque ligne du tableau (1) représente les 3 cos. directeurs d'une droite par rapport à 3 axes orthogonaux Ox_1, Ox_2, Ox_3. On a donc :

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1 \qquad a_{1k}\, a_{1k} = 1$$

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^3 = 1 \qquad a_{2k}\, a_{2k} = 1$$

$$a_{31} + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1 \qquad a_{3k}\, a_{3k} = 1$$

ou $$a_{ik}\, a_{jk} = 1 \quad \text{si } i = j \qquad (2)$$

De plus, 2 lignes successives du tableau (1) représentent les cos. directeurs de 2 axes rectangulaires.

On a :

$$a_{11}\, a_{21} + a_{12}\, a_{22} + a_{13}\, a_{23} = 0 \qquad a_{1k}\, a_{2k} = 0$$

$$a_{21}\, a_{31} + a_{22}\, a_{32} + a_{23}\, a_{33} = 0 \qquad a_{2k}\, a_{3k} = 0$$

$$a_{31}\, a_{11} + a_{32}\, a_{12} + a_{33}\, a_{13} = 0 \qquad a_{3k}\, a_{1k} = 0$$

ou $\underline{a_{ik}\, a_{jk} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j}$ (3)

Les équations (2) et (3) sont appelées relations d'orthogonalité (= 6)
On peut les exprimer en une seule équation :

$$\boxed{a_{ik}\, a_{jk} = \delta_{ij}} \qquad (4)$$

δ_{ij} = symbole de KRONECKER $= \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ = matrice unité (δ_{ij})

Le même raisonnement peut être fait pour les colonnes mais les relations n'apportent pas de renseignements nouveaux

Remarque : propriété de substitution des (δ_{ij})

Considérons la composante p_i d'un vecteur $\overline{p}$

calculons $\delta_{ij} p_i$: on a $\delta_{ij} p_i = p_j$ ⇒ on substitue j à i

De même $\delta_{ij} p_j = p_i$

Pour une composante tensorielle T_{jl} : $\delta_{ij} T_{jl} = T_{il}$

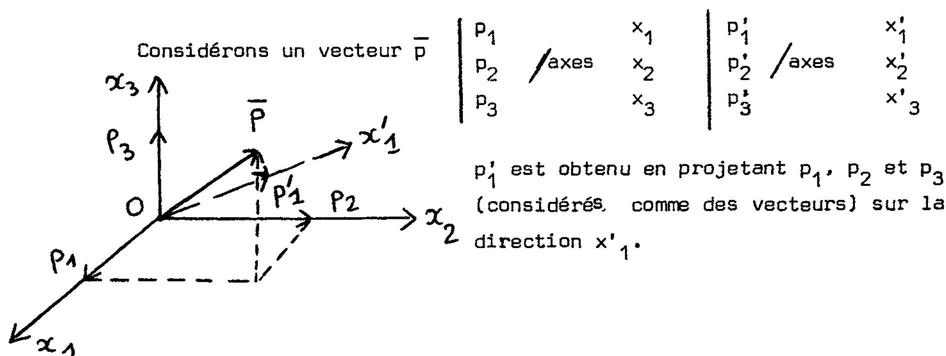
$\delta_{il} T_{jl} = T_{ji}$

(δ_{ij}) est, pour cette raison, souvent appelée matrice de substitution.

Exercice n° 2 - Démontrer, par la notation des indices muets, que le carré de la longueur d'un vecteur $[p_i]$ défini par $p_i p_i$ est conservé dans un changement d'axes (une telle grandeur est un invariant)

$$p_i p_i = a_{ji}\, p'_j\, a_{ki} p'_k = \delta_{jk} p'_j p'_k = p'_k p'_k$$

I.2.2.- Transformations des composantes d'un vecteur



p'_1 est obtenu en projetant p_1, p_2 et p_3 (considérés comme des vecteurs) sur la direction x'_1.

$$p'_1 = p_1 \cos(x_1, x'_1) + p_2 \cos(x_2, x'_1) + p_3 \cos(x_3, x'_1)$$

Soit d'après (9)

$$p'_1 = a_{11}\, p_1 + a_{12}\, p_2 + a_{13}\, p_3 \qquad (10.1)$$

De même

$$p'_2 = a_{21}\, p_1 + a_{22}\, p_2 + a_{23}\, p_3 \qquad (10.2)$$

$$p'_3 = a_{31}\, p_1 + a_{32}\, p_2 + a_{33}\, p_3 \qquad (10.3)$$

que l'on peut écrire selon la notation des indices muets :

$$\boxed{p'_i = a_{ij}\, p_j} \qquad (11)$$

expression des nouveaux p en fonction des anciens.

On peut faire le même raisonnement pour la transformation inverse : on a alors

$$p_1 = a_{11}\, p'_1 + a_{21}\, p'_2 + a_{31}\, p'_3$$

$$\boxed{p_i = a_{ji}\, p'_j} \qquad (12)$$

expression des "anciens" p en fonction des "nouveaux".

Remarque -

Transformations des coordonnées d'un point

Les coordonnées d'un point p $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$ sont les composantes du vecteur $\overline{OP}$.

On a donc :

$$x'_i = a_{ij}\, x_j$$
$$x_i = a_{ji}\, x'_j \qquad (12 \text{ bis})$$

I.2.4.- Transformation des composantes d'un tenseur de rang deux

Les vecteurs $\overline{p}$ et $\overline{q}$ sont reliés entre eux par les 3 équations (6). Les valeurs particulières des coefficients T_{ij} dépendent du système d'axes choisi. Considérons un nouveau système d'axes x'_1, x'_2, x'_3. Les vecteurs $\overline{p}$ et $\overline{q}$ ont pour composantes p'_i et q'_i. Pour trouver les relations qui existent entre les nouvelles composantes, nous utiliserons la série d'équations suivantes :

$$p' \xrightarrow{(11)} p \xrightarrow{(8)} q \xrightarrow{(12)} q'$$

en fonction de

$$p'_i = a_{ik}\, p_k \qquad p_k = T_{kl}\, q_l \qquad q_l = a_{jl}\, q'_j$$

En combinant ces équations :

$$p'_i = a_{ik}\, T_{kl}\, a_{jl}\, q'_j \quad : \text{ or } \quad p'_i = T'_{ij}\, q'_j$$

soit $$\boxed{T'_{ij} = a_{ik}\, a_{jl}\, T_{kl}} \qquad (13)$$

k et l sont des indices muets, alors que i et j sont des indices libres (représentés deux fois).

Les 9 composantes définies par la loi de transformation sont d'un tenseur de rang 2 : équations (13) permettent d'écrire dans les nouveaux axes les relations entre p'_i et q'_j.

Remarque : développement de l'équation (13)

Le développement se fait en deux étapes : d'abord / indice puis / l'autre l'ordre étant indifférent.

Développons /l :

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{j1}\, T_{k1} + a_{ik}\, a_{j2}\, T_{k2} + a_{ik}\, a_{j3}\, T_{k3}$$

k est un indice muet dans chaque terme.

$$\begin{aligned} T'_{ij} = {} & a_{i1}a_{j1}\, T_{11} + a_{i2}a_{j1}T_{21} + a_{i3}\, a_{j1}\, T_{31} \\ & + a_{i1}a_{j2}T_{12} + a_{i2}\, a_{j2}\, T_{22} + a_{i3}\, a_{j2}\, T_{32} \\ & + a_{i1}a_{j3}T_{13} + a_{i2}\, a_{j3}\, T_{23} + a_{i3}a_{j3}\, T_{33} \end{aligned}$$

On comprend ainsi toute l'économie que représente la notation des indices muets : (13) représente un système de neuf équations, chacun ayant 9 termes dans son second membre.

Remarque 2 : transformation inverse

On considérera la série $p \to p' \to q' \to q$ qui permet d'obtenir les anciennes composantes en fonction des nouvelles

$$p_i = a_{ki}\, p'_k \qquad p'_k = T'_{kl}\, q'_l \qquad q'_l = a_{lj}\, q_j$$

d'où

$$\boxed{T_{ij} = a_{ki}\; a_{lj}\; T'_{kl}} \qquad (14)$$

Remarque 3 : moyen mnémotechnique

Dans la transformation (13), où les nouvelles composantes sont exprimées en fonction des anciennes, les indices muets sont aussi voisins que possible, alors que dans la transformation inverse (14) c'est le contraire. Il en est de même pour les lois de transformation vectorielle.

Remarque 4 : le tableau ci-dessous rassemble les lois de transformation d'un scalaire, vecteur, tenseurs de rang deux et plus (nous utiliserons le tenseur élasticité qui est de rang 4). Ces lois de transformation sont d'une importance fondamentale, car elles forment la base de la définition d'un tenseur.

Nom	Rang	Nouveaux en fonction des anciens	Anciens en fonction des nouveaux
Scalaire	0	$\varphi' = \varphi$	$\varphi = \varphi'$
vecteur	1	$p'_i = a_{ij} p_j$	$p_i = a_{ji} p'_j$
Tenseur	2	$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl}$	$T_{ij} = a_{ki}\, a_{lj}\, T'_{kl}$
	3	$T'_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} T_{lmn}$	$T_{ijk} = a_{li} a_{mj} a_{nk} T'_{lmn}$
	4	$T'_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{ko} a_{lp} T_{mnop}$	$T_{ijkl} = a_{mi} a_{nj} a_{ok} a_{pl} T'_{mnop}$

I.3.- Définition d'un tenseur

Les lois de transformation des tenseurs sont d'une importance telle que nous pouvons les utiliser comme définition d'un tenseur. Déterminons leur signification profonde.

Prenons l'exemple du vecteur : on peut dire qu'un vecteur est une quantité qui se transforme dans un changement d'axes selon les équations (11).

Cette règle de transformation nous a été imposée par le fait que les 3 nombres p_i associés aux axes Ox_1, Ox_2 et Ox_3 sont les composantes d'une grandeur physique qui se conserve dans le changement d'axes.

Ainsi dire que les 3 nombres p_i suivent la règle (11) revient à dire qu'ils sont les coordonnées sur Ox_i d'une grandeur physique invariante.

De même un tenseur de rang 2 représente une propriété physique à laquelle on attribue une existence propre en dehors des systèmes d'axes particuliers choisis. C'est la reconnaissance de cette existence (relation entre 2 grandeurs vectorielles) qui nous a conduit aux règles (13) et (14). Inversement on peut dire que quand ces règles sont respectées, cela signifie que l'on manipule "l'être" qui représente une propriété physique indépendante du système d'axes.

Remarque 1 : différence entre la matrice de transformation (a_{ij}) et le tenseur $[T_{ij}]$

(a_{ij}) et $[T_{ij}]$ sont tous deux des tableaux de 9 nombres mais leur ressemblance se limite là.

(a_{ij}) est un tableau de coefficients exprimant les relations entre deux systèmes d'axes. Par contre $[T_{ij}]$ est une grandeur physique qui, pour un système d'axes donné, est représentée par 9 nombres.

Remarque 2 : Tenseurs symétriques et antisymétriques

Un tenseur $[T_{ij}]$ est symétrique si $T_{ij} = T_{ji}$

" " est antisymétrique si $T_{ij} = - T_{ji} \Rightarrow$ ce qui implique que $T_{ii} = 0$.

La propriété de symétrie et d'antisymétrie d'un tenseur est indépendante des axes de référence.

On démontrera facilement que si on a $T_{ij} = T_{ji} \Rightarrow T'_{ij} = T'_{ji}$

$$T'_{ij} = a_{ik}\, a_{jl}\, T_{kl} \qquad T'_{ji} = a_{jl}\, a_{ik}\, \underset{T''_{kl}}{\underset{\parallel}{T_{lk}}} = T'_{ij}$$

I.4.- Quadrique représentative

Nous donnerons dans ce paragraphe la représentation géométrique d'un tenseur de rang 2.

Considérons l'équation

$$S_{ij}\, x_i\, x_j = 1 \qquad (15)$$

où les S_{ij} sont des coefficients

Effectuons les sommations par rapport à i et j dans (15) et posons $S_{ij} = S_{ji}$.

On obtient :

$$S_{11}\, x_1^2 + S_{22}\, x_2^2 + S_{33}\, x_3^2 + 2\, S_{23}\, x_2\, x_3 + 2\, S_{31}\, x_3 x_1 + 2\, S_{12}\, x_1\, x_2 = 1$$

c'est l'équation générale d'une surface du second degré ou quadrique rapportée à un système d'axes dont l'origine est en son centre. Cette quadrique est en général une ellipsoïde ou une hyperboloïde.

On peut transformer l'équation (15) dans un nouveau système d'axes en utilisant les équations (12 bis) donnant la transformation des coordonnées d'un point :

$$x_i = a_{ki} x'_k \qquad x_j = a_{lj} x'_l$$

$$S_{ij}\, a_{ki}\, x'_k\, a_{lj}\, x'_l = 1$$

d'où $\quad S'_{kl}\, x'_k x'_l = 1 \quad$ avec $\quad \boxed{S'_{kl} = a_{ki}\, a_{lj}\, S_{ij}}$

On s'aperçoit que cette loi de transformation est identique à celle d'un tenseur de rang 2.

Nous avions posé $S_{ij} = S_{ji}$. Donc les coefficients S_{ij} de la quadratique (15) se transforment comme les coefficients d'un tenseur symétrique de rang 2.

Pour savoir comment se transforment les composantes d'un tel tenseur, on examinera la transformation de la quadrique correspondante (15) qu'on appelle quadrique représentative du tenseur S_{ij}.

Tous les tenseurs de rang 2 (sauf un, le tenseur thermoélectrique) représentant les propriétés cristallines sont symétriques.

Ainsi la quadrique représentative peut être utilisée pour décrire n'importe quel tenseur symétrique de rang 2 ; en particulier on peut l'utiliser pour décrire n'importe quelle propriété cristalline représentée par un tel tenseur.

I.4.1.- Diagonalisation d'un tenseur. Axes principaux

Sans revenir en détail sur les propriétés des quadriques, on sait qu'elles possèdent des axes principaux : c'est-à-dire qu'il existe trois directions orthogonales telles que l'équation de la quadrique générale, rapportée à ces axes, s'écri

$$S_1 x_1^2 + S_2 x_2^2 + S_3 x_3^2 = 1 \qquad (16)$$

Un tenseur symétrique de rang 2 rapporté à ses axes principaux s'écrira de même :

axes arbitraires $\qquad\qquad$ axes principaux

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}$$

S_1, S_2, S_3 sont les composantes principales du tenseur $\left[S_{ij}\right]$

6 composantes indépendantes ⟹ 3 mais le nombre de "degrés de liberté" reste égal à 6 car 3 quantités indépendantes sont nécessaires pour préciser les directions des axes et 3 autres pour déterminer les valeurs des composantes principales.

La comparaison de (16) à l'équation classique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (16 \text{ bis})$$

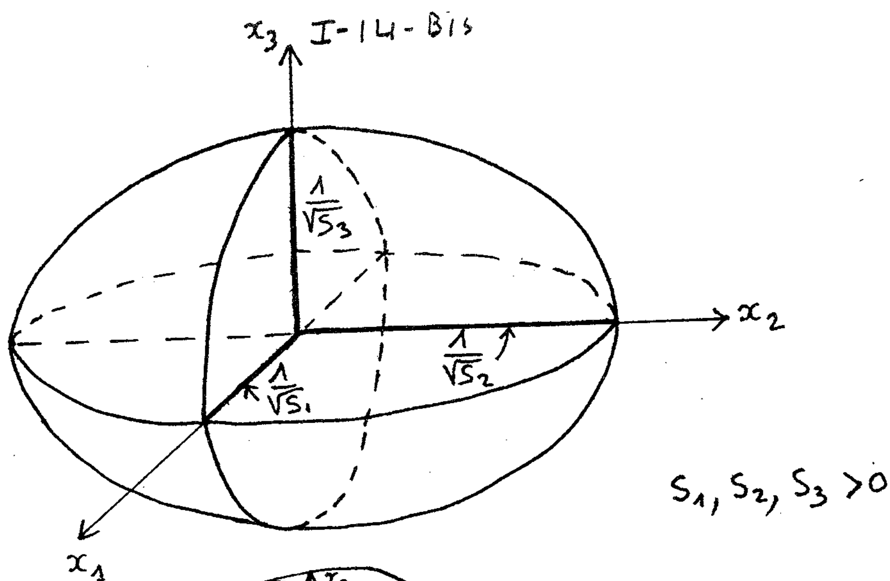
montre que les longueurs des demi axes de la quadrique sont $\frac{1}{\sqrt{S_1}}$, $\frac{1}{\sqrt{S_2}}$, $\frac{1}{\sqrt{S_3}}$

Si S_1, S_2, S_3 sont > 0, la surface est un ellipsoïde.

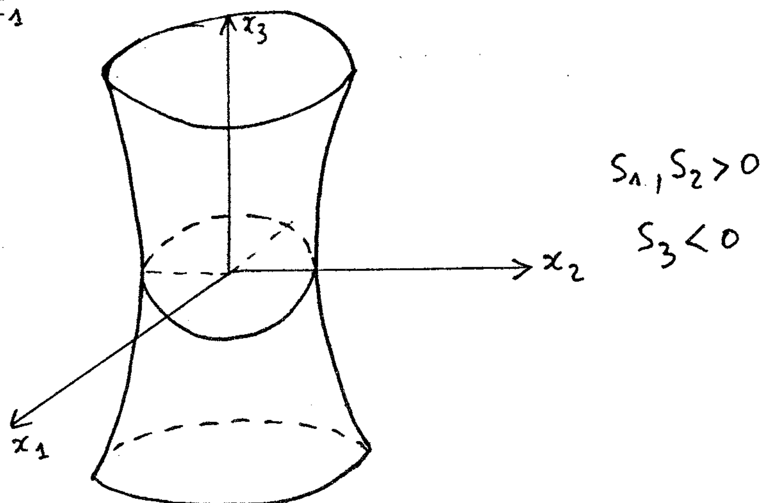
Si deux coefficients sont > 0 et le troisième négatif, on a un hyperboloïde à une nappe (2 sections principales, ⊥ aux axes sont hyperboliques, l'autre étant elliptique).

Si un coefficient est > o et les deux autres < o, on a un hyperboloïde à 2 nappes : 2 sections principales sont des hyperboles et la troisième est une ellipse imaginaire.

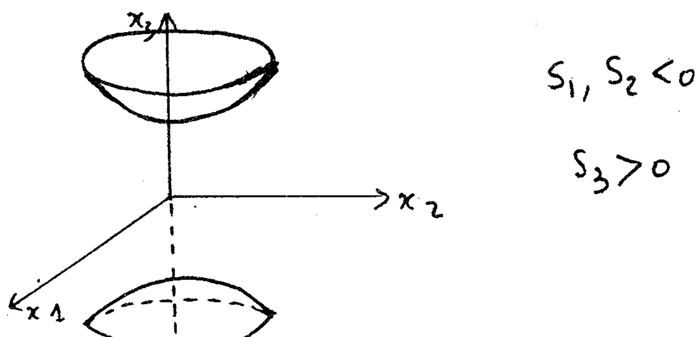
Enfin si 3 < o ⟹ ellipsoïde imaginaire.



I-14-Bis
x_3
x_2
x_1
$\frac{1}{\sqrt{S_3}}$
$\frac{1}{\sqrt{S_2}}$
$\frac{1}{\sqrt{S_1}}$
$S_1, S_2, S_3 > 0$



x_3
x_2
x_1
$S_1, S_2 > 0$
$S_3 < 0$



x_3
x_2
x_1
$S_1, S_2 < 0$
$S_3 > 0$

I.4.2.- Simplification des équations quand elles sont ramenées aux axes principaux

Reprenons l'équation liant le vecteur $\overline{p}$ au vecteur $\overline{p}$

$$p_i = T_{ij}\, q_j \qquad (17)$$

Si $\begin{bmatrix} T_{ij} \end{bmatrix}$ est symétrique, on a $p_i = S_{ij} q_j$

Si $\begin{bmatrix} S_{ij} \end{bmatrix}$ est rapporté à ses axes principaux, (17) s'écrit alors :

$$p_1 = S_1\, q_1 \qquad p_2 = S_2\, q_2 \qquad p_3 = S_3\, q_3 \qquad (17\ \text{bis})$$

Si q est dirigé selon l'un quelconque des 3 axes principaux, p est alors parallèle à q.

I.5.- Grandeur en valeur absolue d'une propriété physique dans une direction donnée

Définition :

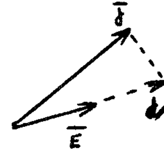
Si on a une propriété tensorielle du type $p_i = S_{ij} q_j$, l'intensité S de la propriété $\begin{bmatrix} S_{ij} \end{bmatrix}$ dans une certaine direction s'obtient en appliquant $\overline{q}$ dans cette direction et en mesurant $P/\!/q$, $P/\!/$ étant la composante de $\overline{p}$ parallèle à $\overline{q}$.

Expressions analytiques

Considérons l'exemple de la conductivité.

1°) par rapport aux axes principaux : axes de référence sont les axes principaux de conductivité.

Considérons une direction $\left|\begin{array}{l} l_1 = \cos \text{ directeur} \\ l_2 \\ l_3 \end{array}\right.$



cos directeur = composantes du vecteur unitaire // direction. On applique $\overline{E}$ dans cette direction $\overline{E} = (l_1 E,\ l_2 E,\ l_3 E)$. Soit d'après (17 bis)

$$\overline{j} = (\sigma_1\, l_1\, E,\ \sigma_2 l_2 E,\ \sigma_3 l_3 E)$$

La composante de $\overline{j}_{/\!/}$ à $\overline{E}$ est la somme des projections des composantes de $\overline{j}$ sur $\overline{E}$ soit :

$$\overline{j}_{/\!/} = l_1^{\,2} \sigma_1 E + l_2^{\,2}\, \sigma_1 E + l_3\, \sigma_3 E$$

L'intensité σ de la conductivité dans la direction l_i est donc :

$$\boxed{\sigma = l_1^{\,2}\, \sigma_1 + l_2^{\,2} \sigma_2 + l_3^{\,2} \sigma_3} \qquad (18)$$

$$l_1^{\,2} + l_2^{\,2} + l_3^{\,2} = 1$$

2) Par rapport à des axes quelconques

Soient l_i les cos directeurs de $\overline{E}$ par rapport aux axes

$$E_i = E l_i \qquad j_i = \sigma_{ij} E_j$$

$$j_{//} = \frac{\overline{j} \cdot \overline{E}}{E} = \frac{j_i E_i}{E}$$ ← produit scalaire en notation tensorielle

Dans la direction l_i, la conductivité est donc :

$$\sigma = \frac{j//}{E} = \frac{j_i E_i}{E^2} = \frac{\sigma_{ij} E_j E_i}{E^2} = \sigma_{ij} l_i l_j$$

$$\boxed{\sigma = \sigma_{ij} l_i l_j} \quad (19)$$

(19) est l' expression générale

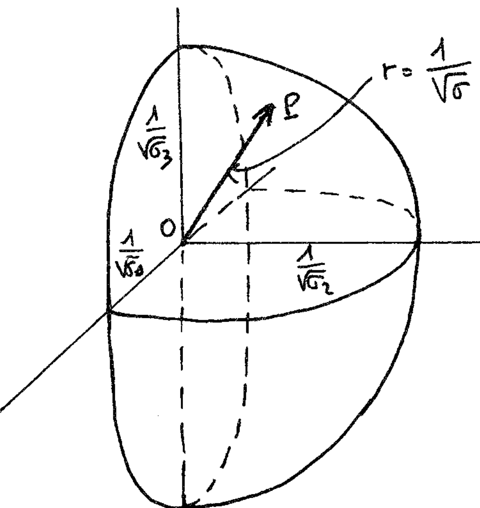
(18) étant 1 cas particulier

L'équation (19) est valable si le tenseur n'est pas symétrique.

I.6.- Propriétés géométriques de la quadrique représentative

I.6.1.- Longueur du rayon vecteur

Soit P un point quelconque de l'ellipsoïde $\sigma_{ij} x_i x_j = 1$



$\overline{OP}$ cos dir. l_1, l_2, l_3 — P | $x_i = r l_i$

si OP = r

Soit $\sigma_{ij} x_i x_j = 1 = r^2 \sigma_{ij} l_i l_j = 1$

D'après (19) $\sigma = \frac{1}{r^2}$ $\boxed{r = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}}$ (20)

Ce raisonnement s'applique à toutes les propriétés représentées par un tenseur symétrique de rang 2 $[S_{ij}]$

$$S = \frac{1}{r^2} \qquad r = \frac{1}{\sqrt{S}}$$

S = intensité de la propriété dans la direction

Remarque : Si la quadrique $S_{ix}\ x_i\ x_j = 1$ est un hyperboloïde ou un ellipsoïde imaginaire, quand les longueurs des rayons vecteurs sont imaginaires, on considèrera alors la quadrique :

$$S_{ij}\ x_i x_j = -1$$

que le rayon vecteur coupe en un point réel et on aura :

$$S = -\frac{1}{r^2} \qquad r = \frac{1}{\sqrt{-S}}$$

- cas de l'hyperboloïde à 2 nappes : - 1 : est transformé en hyperboloïde à 1 nappe

- cas de l'hyperboloïde à 1 nappe : - 1 $\Rightarrow$ 2 nappes

- ou ellipsoïde imaginaire : - 1 $\Rightarrow$ réel

I.6.2.- Propriété de la normale au rayon vecteur

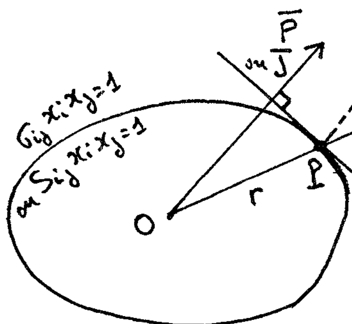
Prenons pour Ox_i les axes principaux de σ_{ij}.

$\overline{E} = (l_1 E,\ l_2\ E,\ l_3 E)$ $\qquad\qquad$ $\overline{J} = (\sigma_1 l_1 E,\ \sigma_2 l_2 E,\ \sigma_3 l_3 E)$

Si P est un point de la surface représentative du tenseur.

$$\sigma_1 x_1^{\ 2} + \sigma_2 x_2^{\ 2} + \sigma_3 x_3^{\ 2} = 1$$

tel que OP soit parallèle à $\overline{E}$: $P \left| \begin{array}{l} rl_1 \\ rl_2 \\ rl_3 \end{array} \right.$ $\qquad$ OP = r



L'équation du plan tengent en P est :

$$r\ l_1\sigma_1 x_1 + rl_2\ \sigma_2 x_2 + rl_3\ \sigma_3 x_3 = 1$$

(généralisation de l'équation de la tangente à 1 ellipse). Les cos directeurs de la normale en P sont proportionnels à :

$l_1\sigma_1,\ l_2\ \sigma_2,\ l_3\sigma_3$.

En effet considérons un point $M \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$ du plan tangent ; le produit $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{normale}$ doit être nul.

soit : $r\, l_1\sigma_1\, (x_1 - rl_1) + rl_2\, \sigma_2(x_2 - rl_2) + rl_3\sigma_3(x_3 - rl_3) = 0$

Le point M vérifiant l'équation du plan tangent en P, cette égalité est satisfaite : les cos directeurs de la normale en P sont donc bien prop | à $l_1\sigma_1$, $l_2\sigma_2$, $l_3\sigma_3$. La normale en P est par conséquent parallèle à $\overline{j}$.

Ce résultat est général : si $p_i = S_{ij}q_j$, on peut déterminer la direction de $\overline{p}$ lorsque $\overline{q}$ est donné en menant d'abord parallèlement à $\overline{q}$ un rayon vecteur OP de la quadrique représentative et en menant ensuite la normale en P à la quadrique.

Remarque : si on a un point imaginaire, on considèrera alors la quadrique $S_{ij}\, x_ix_j = -1$ point réel : (normale vers l'intérieur).

I.7.- Diagonalisation d'un tenseur. Détermination analytique des axes principaux du tenseur. Invariants d'un tenseur.

Nous avons dit au paragraphe I.4. que l'équation de la quadrique représentative $S_{ij}\, x_ix_j = 1$ ($S_{ij} = S_{ji}$) pouvait se simplifier en $S_1x_1^2 + S_2x_2^2 + S_3x_3^2 = 1$ par un changement d'axes. Aux points d'intersection de la quadrique avec ses axes principaux, la normale à la quadrique est parallèle au rayon vecteur. Considérons un point P quelconque de la quadrique : $\overline{OP} \mid x_i$. Nous avons vu (propriété du rayon-normale) que le vecteur $S_{ij}x_j$ est parallèle à la normale en P. Pour les axes principaux le vecteur $S_{ij}x_j$ est // à x_j : ceci s'écrit :

$$S_{ij}\, x_j = \lambda x_i \tag{21}$$

$\lambda = C^{te}$. (21) est un ensemble de 3 équations linéaires et homogènes des variables x_i. Pour que la solution soit différente de $x_i = 0$, le déterminant des coefficients $F(\lambda)$ doit être nul

$$F(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} S_{11}-\lambda & S_{12} & S_{31} \\ S_{12} & S_{22}-\lambda & S_{23} \\ S_{31} & S_{23} & S_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{22}$$

ou $$F(\lambda) \equiv \left| S_{ij} - \lambda\delta_{ij} \right| = 0 \tag{23}$$

Cette équation du 3ème degré en λ est appelée équation séculaire. Les 3 racines λ', λ'', λ''' sont les 3 valeurs possibles de λ qui permettent à l'équation (21) de posséder unz solution $\neq$ de 0. Chaque racine définit une direction pour laquelle le rayon vecteur de laquadrique est // à la normale. Cette direction est

un axe principal.

Ces trois directions sont perpendiculaires 2 à 2 : considérons 2 d'entres elles définies par λ' et λ''. Soient x'_i et x''_i les 2 rayons vecteurs correspondant:

$$\left.\begin{array}{l} S_{ij}\, x'_j = \lambda'\, x'_i \\ S_{ij}\, x''_j = \lambda''\, x''_i \end{array}\right\} \begin{array}{l} \times\ x''_i \\ \times\ x'_i \end{array}$$

Multiplions la 1ère par x''_i et la 2ème par x'_i et soustrayons

On a $S_{ij}(x'_j\, x''_i - x''_j\, x'_i) = (\lambda' - \lambda'')\, x'_i x''_i$

Puisque $S_{ij} = S_{ji}$, le 1er membre est nul donc $x'_i x''_i = 0$

Le produit scalaire de x'_i et x''_i est nul : les 2 vecteurs sont perpendiculaires.

Direction des axes principaux

On résout l'équation (22) par rapport à λ . Avec une des valeurs de λ on forme les 3 équations (21): $S_{ij}\, x'_j = \lambda'\, x'_i$ et on détermine les valeurs x'_1, x'_2, x'_3
On recommence pour λ'' : x''_1, x''_2, x''_3. La 3ème direction est perpendiculaire aux 2 autres.

Longueur des axes principaux

$S_{ij}\, x'_j = \lambda'\, x'_i$ multiplions les 2 membres par x'_i

$S_{ij}\, x'_j\, x'_i = \lambda'\, x'_i x'_i = 1$ x'_i étant un rayon vecteur.

La longueur du rayon vecteur correspondant à λ' est donc :

$$\sqrt{x'_i\, x'_i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda'}}$$

Les axes principaux ont pour longueur $\frac{1}{\sqrt{S_1}}$ $\frac{1}{\sqrt{S_2}}$ $\frac{1}{\sqrt{S_3}}$

donc

$$\boxed{S_1 = \lambda' \qquad S_2 = \lambda'' \qquad S_3 = \lambda'''} \qquad (24)$$

Les 3 racines de (22) sont égales aux 3 coefficients principaux S_1, S_2, S_3.

Remarque : moyen mnémotechnique : si la quadrique est déjà rapportée à ses axes principaux, l'équation séculaire est alors :

$$\begin{vmatrix} S_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & S_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & S_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(S_1 - \lambda) \quad (S_2 - \lambda) \quad (S_3 - \lambda) = 0$ dont les racines sont évidemment S_1, S_2, S_3.

Invariants d'un tenseur

L'équation séculaire (22) permettant de diagonaliser le tenseur s'écrit si on la développe

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0$$

avec $I_1 = S_{ii} = S_{11} + S_{22} + S_{33}$

$$I_2 = \frac{1}{2} (S_{ii} S_{jj} - S_{ij}^2)$$

$$= S_{11}S_{22} + S_{22}S_{33} + S_{33}S_{11} - S_{12}^2 - S_{13}^2 - S_{23}^2$$

$I_3 = \left| S_{ij} \right|$ = déterminant de la matrice des S_{ij}.

Cette équation doit conserver les mêmes racines si on change d'axes puisque les valeurs propres sont constantes (axes principaux du tenseur , leur longueur étant égale aux racines). Par conséquent I_1, I_2 et I_3 sont les trois invariants d'un tenseur.

CHAPITRE II

CARACTERISTIQUES DES MATERIAUX

ESSAIS FONDAMENTAUX

II-1. - Essai de traction

L'essai de traction consiste à soumettre un échantillon à des contraintes longitudinales qui tendent à l'allonger ou même à le casser. On trace ainsi un diagramme effort-déformation.

Dans une machine de traction, les extrémités de l'éprouvette sont solidaires de deux traverses rigides : l'une est fixe, l'autre est rendue mobile par un dispositif à vis ou hydraulique. Une vitesse de déplacement constante est imposée à la traverse mobile et on mesure la charge à chaque instant grâce à des capteurs électriques ou à des dispositifs mécaniques ou hydrauliques. Les variations de la charge F en fonction de l'élongation $\Delta L = L - L_o$ sont mesurées : on obtient ainsi une courbe de traction.
L'essai de traction doit être réalisé dans des conditions précises, sur des éprouvettes normalisées. On utilise très souvent des éprouvettes cylindriques dont les extrémités (têtes) de diamètre supérieur sont raccordées à la partie utile (corps) par des congés de grand rayon (fig. 1).

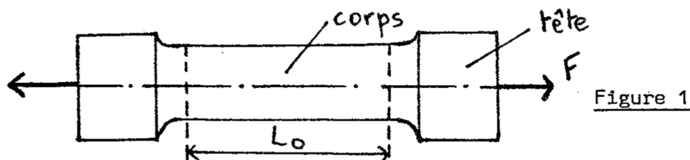


Figure 1

La forme générale d'une courbe de traction est indiquée par la figure 2.
Elle se compose de deux parties :

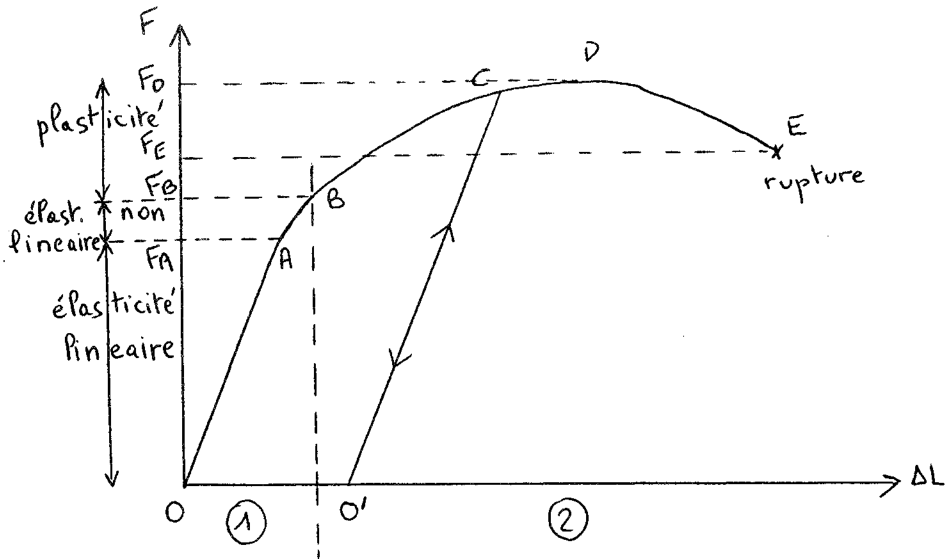


Figure 2

- zone 1 : zone élastique (zone OAB) le solide reprend son état initial dès que la charge est supprimée. Dans ce cas la transformation est parfaitement réversible : la relation effort-déformation est univoque.

La courbe OB est constituée de deux parties :

- une partie rectiligne OA (pour une charge $< F_A$)
- une partie légèrement courbée AB (pour une charge $F_A < F < F_B$). La partie OA est dite zône d'élasticité linéaire et F_A est la limite d'élasticité proportionnelle. La partie AB est dite zône d'élasticité non linéaire et F_B est la limite d'élasticité.

Remarque : la signification de ces limites est toute relative car elle dépend de la précision des mesures.

- zone 2 : (zone BDE) zone plastique : lorsqu'on supprime l'effort, l'éprouvette ne revient pas à son état initial mais garde une déformation permanente ou plastique.

Si on fait croître la charge jusqu'en C puis si on fait décroître, on décrit la courbe CO', OO' représentant l'allongement permanent. La courbe CO' est pratiquement parallèle à la courbe OA. Si après cette expérience, on procède à une nouvelle charge on constate que la limite élastique du matériau F_C est plus grande que précédemment ($F_C > F_B$). C'est le phénomène d'écrouissage : la limite élastique a été augmentée mais le matériau est plus fragile.

Dans la zone BD, les allongements sont répartis uniformément dans l'éprouvette (plasticité répartie) alors que dans la zone DE, les allongements deviennent localisés : la déformation a lieu dans une région très limitée de l'éprouvette dont la section diminue rapidement : c'est le phénomène de striction ou plasticité localisée (fig. 3).

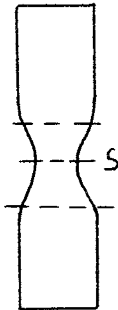


Figure 3

La striction précède de peu la rupture qui a lieu dans la section la plus réduite en S pour une charge ultime F_E.
En fait la rupture commence en D et la charge F_D est appelée charge de rupture ou charge maximum.

II.2 - Essai de compression

Dans l'essai de compression peut apparaitre le phénomène de flambage pour les éprouvettes longues (fig. 4). On dit qu'il y a flambage quand sous l'action d'un effort axial une éprouvette fléchit. Pour éviter le phénomène de flambage, il faut que le rapport longueur sur diamètre soit petit. En général, la longueur ne doit pas excèder 3 fois le diamètre.

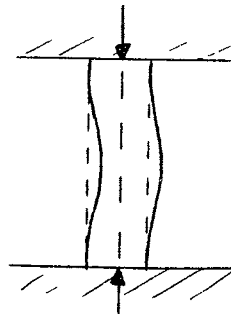


Figure 4

Mais dans ce cas le rôle des faces d'appui devient important : la dilatation des extrémités de l'éprouvette est gênée par le frottement entre les extrémités et les plateaux de compression (problème de la liaison d'extrémité). Ainsi les extrémités de l'éprouvette de compression ont tendance à garder leur diamètre

initial alors que la section centrale se dilate donnant à l'éprouvette une forme de tonneau (fig. 5).

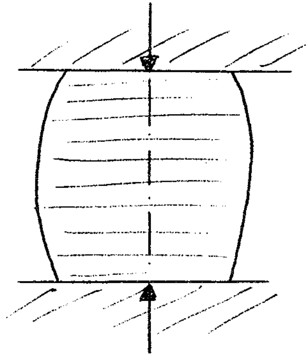


Figure 5

II.3 - Essai de torsion

Ce type d'essai permet essentiellement de déterminer les caractéristiques des matériaux aux grandes déformations. En effet, dans le cas de la torsion, il n'y a pas de modification de la forme de l'éprouvette et par conséquent la striction n'existe pas.

L'essai de torsion consiste en la mesure de la déformation angulaire α en fonction du couple C appliqué aux extrémités du cylindre (fig.6).

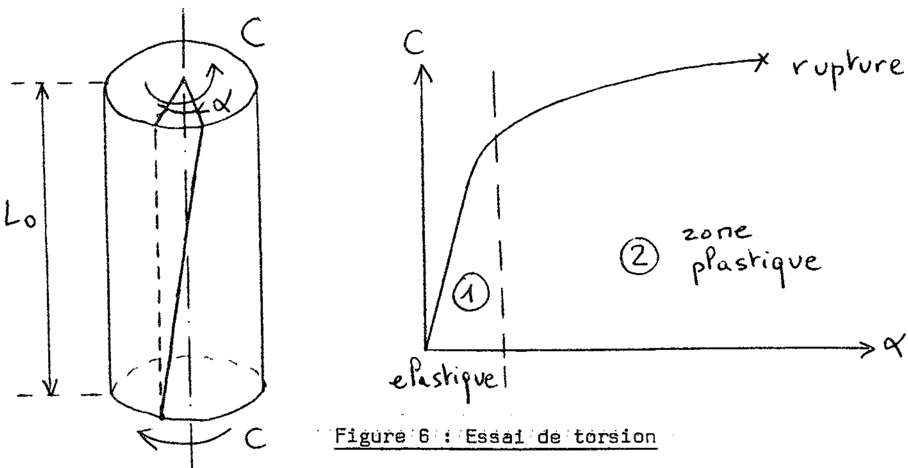


Figure 6 : Essai de torsion

Le diagramme de torsion a l'allure indiquée par la figure 6. On remarque les mêmes domaines qu'en traction :

- les déformations sont d'abord proportionnelles au couple : c'est le domaine élastique. La longueur du cylindre L_0 est constante.
- les déformations deviennent ensuite permanentes : c'est la zone plastique. La longueur augmente très légérement alors que le diamètre de l'éprouvette subit une légère diminution.

Il faut remarquer que tous les points décrivent des arcs de cercle même dans le domaine plastique. Dans l'essai de torsion, la déformation n'est pas homogène : elle est nulle sur l'axe et maximale sur la surface. Pour avoir une déformation homogène, on utilise parfois un tube à paroi très mince. Mais les difficultés pratiques d'usinage et les phénomènes de flambage rendent difficile ce genre d'essais.

II.4 - Notion de contrainte

II.4.1. - Définition

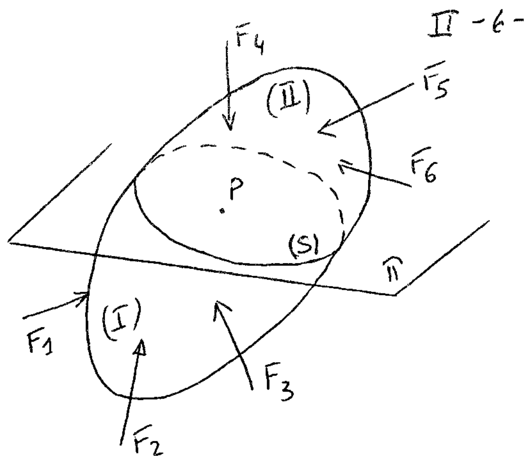
Un solide est en état de contrainte quand il est soumis à l'action des forces extérieures.

Un élément de volume à l'intérieur d'un corps en état de contrainte est soumis à deux catégories de forces :

1 - les forces de volume : dues à des champs de force (comme, par exemple, la pesanteur) qui s'exerce sur tous les éléments de volume. Les forces de volume sont proportionnelles au volume de l'élément.

2 - les forces de surface : exercées sur la surface de l'élément par le milieu qui l'entoure. Elles sont proportionnelles à la surface externe de l'élément. La force par unité de surface est appelée "contrainte".

Considérons un corps en équilibre soumis à l'action de forces extérieures F_1, F_2 ... F_i ...... Sous l'action de ces forces extérieures, des forces intérieures vont prendre naissance. Pour étudier la grandeur de ces forces en un point quelconque P, séparons le corps en deux parties I et II par un plan quelconque π passant par le point P. Considérons l'une des parties I.(fig 7).



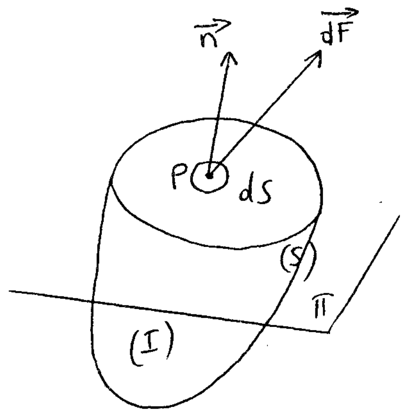


Figure 7

Elle est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont appliquées et des forces intérieures réparties sur la section transversale (S) du corps par le plan π qui représentent l'action de la partie II sur la partie I. On admet que ces forces intérieures sont réparties d'une manière continue sur la surface (S). Si on considère un élément de surface dS appartenant à la section (S) et passant par le point P, les actions exercées par la partie II sur la partie I à travers dS ont pour résultante $\overrightarrow{dF}$.

La limite de $\left(\frac{dF}{dS}\right)$ quand dS tend vers 0 donne la contrainte agissant sur la section (S) au point P.

$$\lim_{dS \to 0} \left(\frac{\overrightarrow{dF}}{dS}\right) = \overrightarrow{\Phi}_n$$

contrainte au point P sur la facette dS dont l'orientation est définie par la normale $\vec{n}$ à la facette (la normale est orientée vers l'extérieur de la partie isolée I).

Une contrainte est une grandeur vectorielle. On a l'habitude de décomposer la contrainte en deux composantes (fig. 8) :

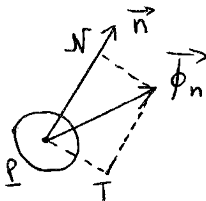


Figure 8

- $\overline{PN} = \sigma$: composante normale de la contrainte ou contrainte normale ($\sigma > 0$ correspond à une tension, $\sigma < 0$ à une compression).
- $\overline{PT} = \tau$: composante tangentielle de la contrainte ou contrainte tangentielle (ou de cisaillement) ou cission.

L'équation aux dimensions d'une contrainte est

$$\frac{LMT^{-2}}{L^2} = M\,L^{-1}T^{-2}$$

L'unité de contrainte du système international est le Pascal (symbole Pa) :

$$1\,Pa = \frac{1N}{1m^2}$$

On utilise couramment comme unités : bar et hectobar :

$$bar = \frac{daN}{cm^2} = 10^5\ Pa$$

$$1hbar = \frac{daN}{mm^2} = 10^7\ Pa$$

On exprime encore les contraintes en kgf/mm^2 :

$g = 9,81\ m/s^2$ $\qquad$ $1\ kgf/mm^2 = 9,81\ \ 10^6\ Pa$

soit sensiblement $\boxed{1\ kgf/mm^2 \simeq 1\ hbar}$

II.4.2. - Equilibre - Réduction des forces extérieures

Quand on réalise une coupure dans un solide comme précédemment, la partie isolée reste en équilibre sous l'action d'une part des forces extérieures qui lui sont appliquées et d'autre part des actions de contact identiques aux actions de la partie enlevée. Le corps étant en équilibre, le système des forces appliquées à la partie isolée est donc équivalent à zéro. Ce système comprend :

- d'une part le système des forces extérieures appliquées à la partie isolée
- d'autre part le système des forces appliquées dans la surface de la coupure (soit le système des contraintes dans cette surface).

Ces deux systèmes de forces sont donc opposées. Si on réalise leur réduction en un point, leurs résultantes sont opposées et leurs moments résultants par rapport à ce point sont opposés.

Ainsi pour étudier les contraintes dans une section d'un corps, on effectue la réduction du système des forces extérieures appliquées à l'une des parties isolées par la section, cette réduction étant généralement effectuée au centre de gravité G de la section (fig. 9).

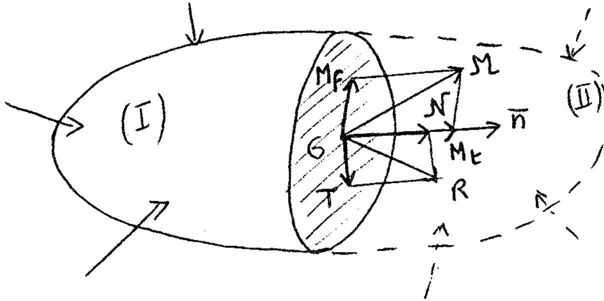


Figure 9

Si R est la résultante en G des forces extérieures appliquées à la partie (I), on appelle :

- la composante normale à S : N : résultante normale ou de traction ou effort longitudinal
- la composante tangentielle T : résultante tangentielle ou de cisaillement ou effort tranchant

Si M est le moment résultant en G des forces extérieures appliquées à la partie (I), on appelle :

- la composante normale : M_t : moment de torsion
- la composante tangentielle : M_f : moment de flexion

II.4.3. - Quelques exemples

1/ Traction : Soit une pièce travaillant en traction simple c'est-à-dire soumise à ses extrémités A et B à deux forces opposées F et -F (fig 10).

Considérons une facette S perpendiculaire à l'axe de traction z séparant l'éprouvette en deux parties (I) et (II).

Effectuons la réduction en G centre de gravité S des forces extérieures appliquées à la partie I.

Ces forces se réduisent à -F :

On aura N = -F : valeur algébrique sur l'axe z de l'effort appliqué sur la partie isolée I.

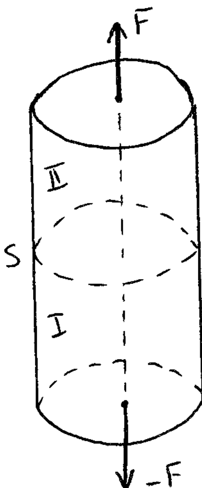
$$T = 0$$
$$M_t = 0$$
$$M_f = 0$$

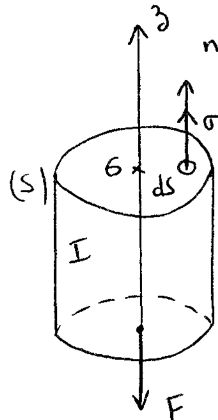
L'équilibre de la partie I soumise à la force F et aux contraintes dans la section S implique que la résultante des contraintes soit égale à -N et que le moment résultant par rapport à G soit nul.

Ces conditions sont vérifiées par un système de contraintes normales (τ = 0) et uniformes.

$$\int_S \sigma dS + N = 0 \qquad \sigma \int_S dS + N = 0$$

$$\boxed{\sigma = -\frac{N}{S} = \frac{F}{S} > 0}$$





F>0

Figure 10

2/ Torsion d'un tube

On dit qu'il y a torsion pure si la réduction des forces extérieures est telle que seul le moment de torsion n'est pas nul. C'est le cas des sections droites d'une pièce cylindrique soumise aux extrémités à deux couples opposés. On procède de la même manière que pour la traction (fig. 11).

Les forces extérieures appliquées à la partie I se réduisent à un couple -C :
$N = 0$, $T = 0$, $M_t = -C$, $M_f = 0$.

L'équilibre de la partie I implique que le système des contraintes ait une résultante nulle et un moment résultant par rapport à G égal à $-M_t$. On fait les hypothèses suivantes :

1 -Dans la section S, les contraintes normale σ sont nulles (il n'y a pas de déplacement axial de la section) et les contraintes radiales sont nulles aussi car la section reste de grandeur constante (ceci découle de l'observation expérimentale). Seules existent les contraintes τ normales au rayon vecteur.

2 - On peut admettre dans le cas d'un tube mince que τ = cte.

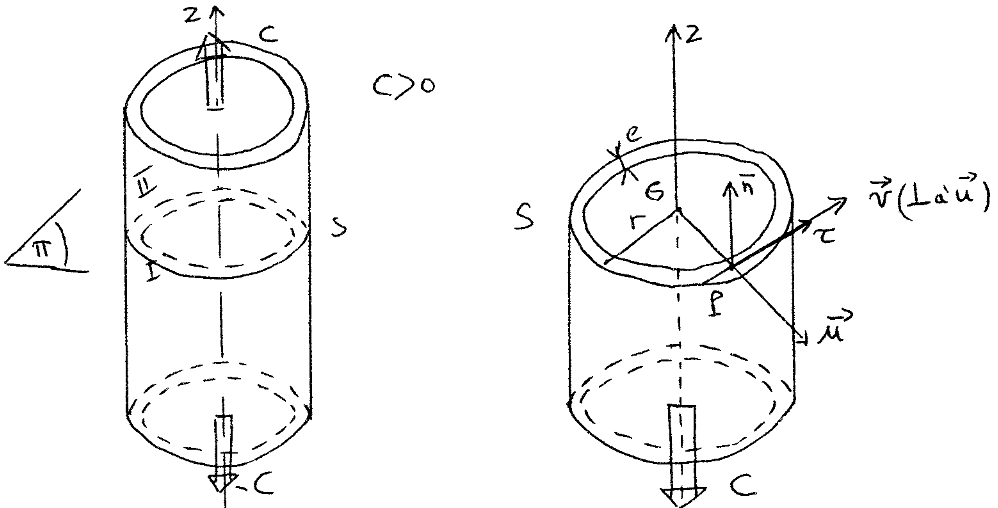


Figure 11

On a donc l'équation d'équilibre :

$$\int_S \tau \, r dS + M_t = 0$$

$$\tau \int_S r dS + M_t = 0 \qquad \tau r S + M_t = 0$$

$$\boxed{\tau = -\frac{M_t}{rS} = \frac{C}{rS}} \qquad S = 2\pi r e$$

3 - Torsion d'une barre pleine

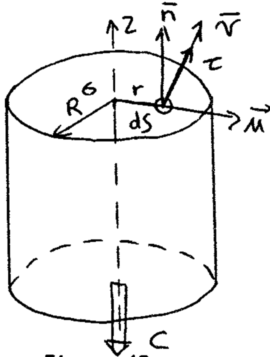


Figure 12

La contrainte n'est pas homogène : elle est nulle sur l'axe z et maximale pour r = R

On peut admettre que :

$\tau = kr$

L'équation d'équilibre est donc :

$$\int_S \tau \, r dS + M_t = 0$$

$$k \int_S r^2 \, dS + M_t = 0$$

$\int r^2 \, dS = I_G$ = moment d'inertie de la section par rapport à son axe ou moment d'inertie polaire de la section

$$k = -\frac{M_t}{I_G} = \frac{C}{I_G}$$

soit $\boxed{\tau = -\frac{M_t}{I_G} r = \frac{C}{I_G} r}$

II.5. - Notion de déformation

II.5.1. - Dilatation linéaire unitaire

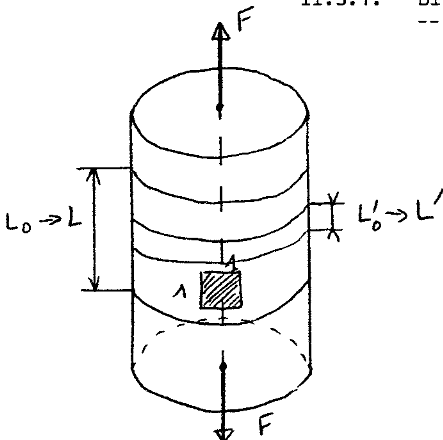


Figure 13

Considérons un essai de traction. Au cours de l'essai, la longueur entre deux sections augmente : on définit la dilatation linéaire unitaire dans la direction longitudinale par le rapport (sans dimension) :

$$\frac{L - L_o}{L_o} = \frac{L' - L'_o}{L'_o} = \ldots = Cte = \varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L_o}$$

Dans la direction transversale :

$$\varepsilon_T = \frac{\pi D - \pi D_o}{D_o} = \frac{D - D_o}{D_o} = \frac{\Delta D}{D_o}$$

Si on considère un carré de côté unité dont le plan contient l'axe de traction, il se déforme de la manière indiquée par la figure 14 :

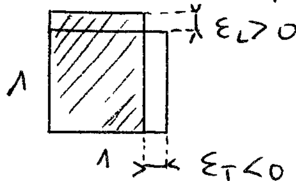


Figure 14

On a $\varepsilon_L = \frac{\Delta L}{1} = \Delta L$

$\varepsilon_T = \Delta D$

Remarques :

1 - Quelle que soit F, dans le domaine élastique, on remarque que

$$\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L} = \frac{\frac{D-D_o}{D_o}}{\frac{L-L_o}{L_o}} = Cte = -\nu$$

soit $\boxed{\nu = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L}}$ ν est le coefficient de Poisson

($\nu \simeq 0,3$ pour l'acier)

2 - Le volume de l'échantillon est $V = \frac{\pi D^2}{4} \times L$

La variation relative de volume est égale à $\frac{\Delta V}{V} = \frac{2\Delta D}{D} + \frac{\Delta L}{L}$

soit $\frac{\Delta V}{V_o} = \frac{2\Delta D}{D_o} + \frac{\Delta L}{L_o} = -2\nu\,\varepsilon_L + \varepsilon_L$

soit $\boxed{\frac{\Delta V}{V_o} = (1 - 2\nu)\,\varepsilon_L}$

si $\nu = 0,5$: le corps est incompressible.

Donc le volume d'un acier en traction augmente dans le domaine élastique (fig 15).

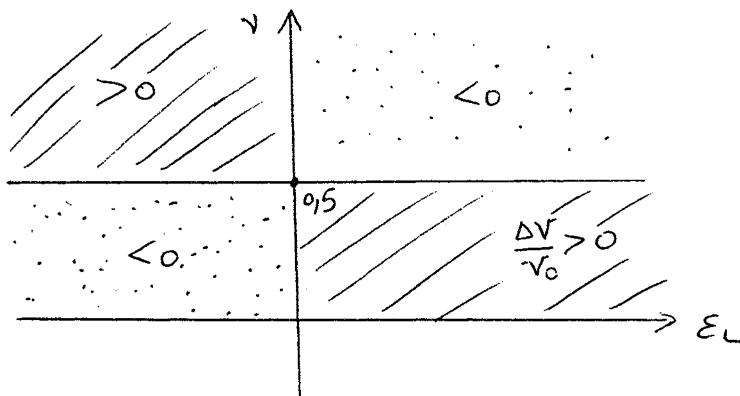


Figure 15

II.5.2. - Glissement

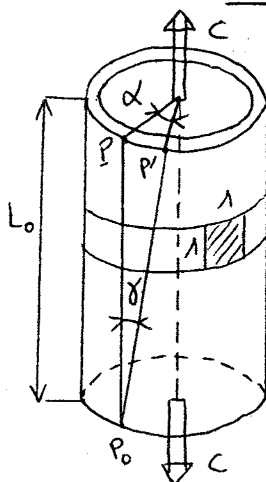


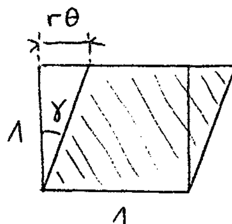
Figure 16

Considérons le cas de la torsion d'un tube (fig 16). Sous l'action du couple de torsion, le déplacement d'une section droite est uniquement une rotation α autour de son axe et proportionnelle à la distance à la section d'encastrement (section de référence).

On appelle déformation relative en torsion θ, la rotation par unité de longueur :

$$\theta = \frac{\alpha}{L_0} = \frac{\alpha'}{L'_0} = \text{cte}$$

Si on considère un parallèlogramme unité, le glissement relatif ou glissement par unité de longueur du cylindre est l'angle de l'hélice formée par les points d'une génératrice initiale du cylindre.



$\gamma \simeq r\theta$ (glissement ou distorsion)

ou $\gamma \simeq \frac{r\,\alpha}{L_0}$

II.6 - Diagrammes fondamentaux

1 - Traction : A partir de la courbe conventionnelle (F, ΔL) obtenue comme indiqué au § II.1, on peut tracer la courbe donnant la contrainte vraie en fonction de ε_L.

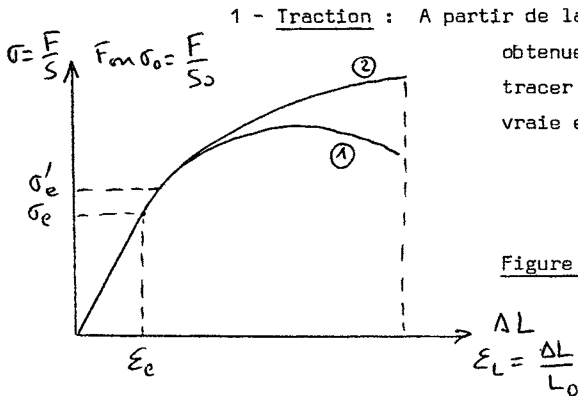


Figure 17

σ_o = contrainte conventionnelle = $\frac{F}{S_o}$

σ = contrainte vraie = $\frac{F}{S}$

Le domaine élastique linéaire est caractérisé par la pente de la droite E module d'élasticité longitudinale ou de Young.

| $\sigma = \varepsilon E$ | loi de Hooke pour une contrainte uniaxiale.

Acier E $\simeq$ 21.000 hbar.

Remarque : si $\sigma_e \simeq 21$ hbar, l'allongement unitaire ε_e correspondant est égal à :

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma e}{E} = 10^{-3} = 0,1\%$$

On définit σ_e la limite de proportionnalité
σ'_e la limite d'élasticité

Pour les métaux usuels, $\sigma_e \simeq \sigma'_e$

Souvent, il est difficile de définir la limite élastique car elle n'apparait pas toujours comme un point particulier sur la courbe de traction (cf. physique des matériaux). On définit alors une limite élastique conventionnelle à 0,2 % qui est la contrainte provoquant un allongement permanent de 0,2%.

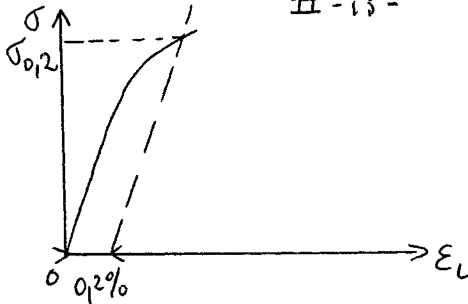


Figure 18

2 - Torsion :

On trace le diagramme contrainte-glissement à partir de la courbe de torsion (pour un tube par exemple).

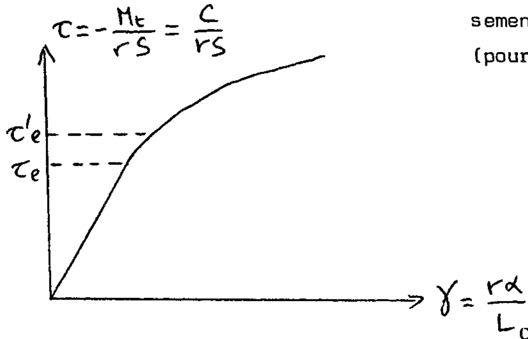


Figure 19

τ_e est la limite de proportionnalité au cisaillement

τ'_e est la limite d'élasticité au cisaillement

En général pour les métaux $\tau_e \simeq \tau'_e$

Le domaine élastique est caractérisé par la pente de la droite qui est le module d'élasticité transversale ou de Coulomb G

$$\boxed{\tau = G\gamma}$$ loi de Hooke pour une contrainte tangentielle

Acier : G $\simeq$ 8000 hbar

Remarques :

1/ Nous verrons par la suite que les 3 constantes élastiques E, G, ν ne sont pas indépendantes. Il existe en effet entre ces 3 constantes la relation

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

2/ τ_e et σ_e sont aussi liées par l'intermédiaire des critères de résistance.

3/ Dans le domaine plastique, il existe une liaison entre les courbes fondamentales de traction et de torsion. En effet, on peut établir une courbe générale d'écrouissage. De plus, la loi de Hooke n'est plus valable dans le domaine plastique. Elle doit être remplacée par une loi plus générale (loi de comportement).

CHAPITRE III

TENSEUR DE CONTRAINTES

III.1. Définition - Notations - Contrainte sur une facette quelconque

Considérons à l'intérieur d'un corps un parallélépipède infiniment petit autour d'un point P et d'arêtes parallèles aux axes de coordonnées rectangulaires Ox_1, Ox_2, Ox_3 (fig.1).

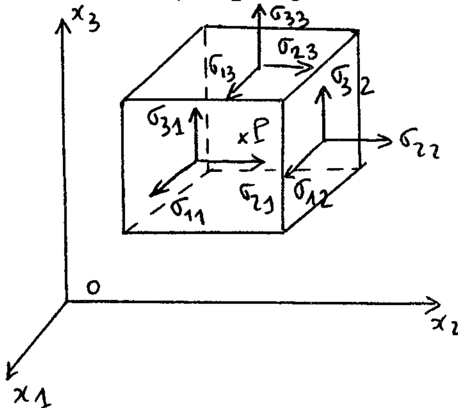


Figure 1

Sur chaque face du parallélépipède, la matière exerce une force qui peut être décomposée en 3 composantes. Si on considère une face perpendiculaire à l'axe Ox_1, on a les composantes de contrainte :

- σ_{11} parallèle à l'axe Ox_1 : contrainte normale
- σ_{21} parallèle à l'axe Ox_2) contrainte de
- σ_{31} parallèle à l'axe Ox_3) cisaillement

On peut adopter la même définition pour les faces perpendiculaires à l'axe Ox_2 et à l'axe Ox_3. On définit ainsi 9 composantes de la contrainte autour du point P que l'on peut désigner d'une façon générale par σ_{ij}, σ_{ij} étant la composante selon l'axe Ox_i de la contrainte qui s'exerce sur une face du parallélépipède perpendiculaire à l'axe Ox_j.

σ_{ij} représente la contrainte exercée dans la direction $+Ox_i$ par la matière qui se trouve du côté $+Ox_j$ sur la matière qui se trouve du côté $-Ox_j$.

On adopte la convention de signe suivante :

$\sigma_{ii} > 0$ correspond à une tension

$\sigma_{ii} < 0$ compression

σ_{ii} représente les composantes normales de la contrainte

σ_{ij} $(i \neq j)$ représente les composantes de cisaillement (ou tangentielles)

Remarque : sur la face perpendiculaire à Ox_1 mais orientée par l'opposée de $\vec{1}$, on a $-\sigma_{11}$, $-\sigma_{21}$, $-\sigma_{31}$ (action et réaction)

III.1.1. Caractère tensoriel des σ_{ij}

Nous allons maintenant montrer que les composantes des contraintes σ_{ij} forment un tenseur de rang 2. On a vu qu'un ensemble de grandeurs T_{ij} liant deux vecteurs p_i et q_i par une équation de la forme :

$$p_i = \sum_j T_{ij}\, q_j = T_{ij}\, q_j \qquad (1)$$

obéissent à une loi de transformation tensorielle et forment donc un tenseur de rang deux.

Il faut donc montrer que σ_{ij} lient bien 2 vecteurs par une équation de ce type.

Considérons un solide en équilibre soumis à des contraintes.

Soit à l'intérieur d'un tel solide un tétraèdre élémentaire PABC (infiniment petit) et étudions son équilibre (fig. 2).

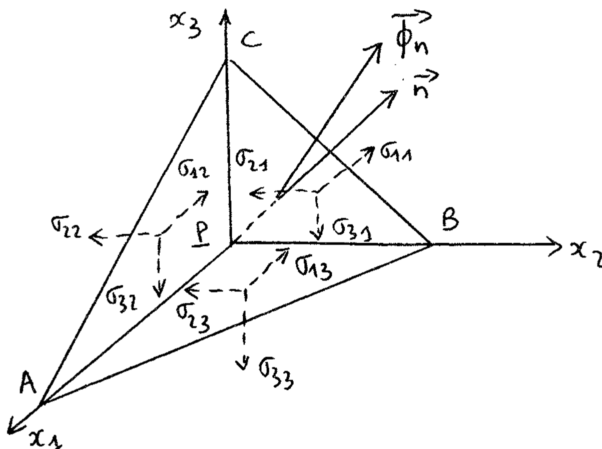


Figure 2

L'orientation de la face ABC du tétraèdre est définie par sa normale $\vec{n}$ (vecteur unitaire dirigé de l'intérieur vers l'extérieur) dont les cosinus directeurs sont :

$$\vec{n} \left| \begin{array}{l} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{array} \right.$$

Sur la facette ABC s'exerce une force égale à Φ_n x S (ABC) (force exercée par la matière située du côté >0 sur la matière située du côté <0).Les forces qui s'exercent sur les 3 autres faces sont représentées par les composantes des contraintes σ_{ij} : les forces de volume (poids, inertie) du 3ème ordre peuvent être négligées par rapport aux forces de surface précédentes qui sont du 2ème ordre.
Le tétraèdre étant en équilibre, il doit être soumis à un ensemble de forces équivalent à zéro : la résultante $\sum \vec{F}$ et le moment résultant doivent être nuls.

* $\sum \vec{F} = 0$

Suivant l'axe Px_1, cette équation s'écrit :

$$X_1 S = \sigma_{11} \, BPC + \sigma_{12} \, APC + \sigma_{13} \, APB$$

Aire (BPC) = Aire (ABC) x n_1

Aire (APC) = Aire (ABC) x n_2

Aire (APB) = Aire (ABC) x n_3

Soit $X_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3$

de même pour les axes Ox_2 et Ox_3 ; soit

$X_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3$

$X_3 = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3$

soit en notation indicielle

$$\boxed{X_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j = \sigma_{ij} n_j} \qquad (2) \qquad i = 1 \text{ à } 3$$

Les σ_{ij} lient donc les vecteurs X_i et n_j selon une relation linéaire identique à l'équation (1). Ils forment donc un tenseur du second ordre.

La rélation (2) permet donc de calculer les contraintes pour une facette d'orientation quelconque à partir des composantes σ_{ij}. La connaissance du tenseur des contraintes σ_{ij} suffit donc pour déterminer complètement l'état de contrainte autour du point P.

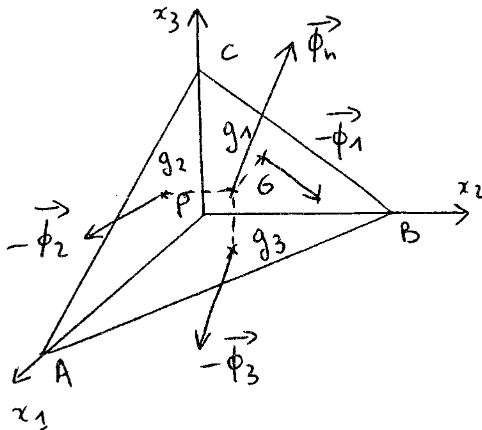
Remarque : Présentation matricielle de l'équation (2) :

$$\vec{\Phi}_n = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = [X] \qquad \vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = [n]$$

$$\sigma_{ij} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = [\sigma]$$

On a donc $[X] = [\sigma]\ [n]$

* Moment résultant = 0 (fig. 3).



$PA_1 = l_1$ $\qquad Gg_1 = l_1/3$

$PA_2 = l_2$ $\qquad Gg_2 = l_2/3$

$PA_3 = l_3$ $\qquad Gg_3 = l_3/3$

$$\Phi_1 \begin{vmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{vmatrix} \qquad \Phi_2 \begin{vmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \end{vmatrix} \qquad \Phi_3 \begin{vmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

Figure 3

Soit G le centre de gravité de ABC et g_1, g_2, g_3 ses projections sur les faces PBC, PAC et PAB respectivement. L'équation du moment par rapport à G s'écrit (dans le cas où il n'existe pas de champ de moments) :

$$-\vec{Gg_1} \wedge \vec{\Phi}_1 (\text{aire PBC}) - \vec{Gg_2} \wedge \vec{\Phi}_2 (\text{aire PAC}) - \vec{Gg_3} \wedge \vec{\Phi}_3 (\text{aire PAB}) = 0$$

$$\text{soit } S n_1 (\vec{Gg_1} \wedge \vec{\Phi}_1) + S n_2 (\vec{Gg_2} \wedge \vec{\Phi}_2) + S n_3 (\vec{Gg_3} \wedge \vec{\Phi}_3) = 0$$

Suivant l'axe Px_1 on a :

$$\overrightarrow{Gg_1} \wedge \overrightarrow{\phi_1} \Rightarrow 0 \quad , \quad \overrightarrow{Gg_2} \wedge \overrightarrow{\phi_2} \Rightarrow \frac{l_2}{3}\,\sigma_{32} , \quad \overrightarrow{Gg_3} \wedge \overrightarrow{\phi_3} \Rightarrow -\frac{l_3}{3}\,\sigma_{23}$$

soit $Sn_2 \dfrac{l_2}{3}\,\sigma_{32} - Sn_3\,\dfrac{l_3}{3}\,\sigma_{23} = 0$

or $Sn_2\,\dfrac{l_2}{3} = Sn_3\,\dfrac{l_3}{3} = V$ = volume du tétraèdre ($\frac{1}{3}$ base x hauteur)

d'où $\boxed{\sigma_{23} = \sigma_{32}}$

De même suivant les 2 autres axes

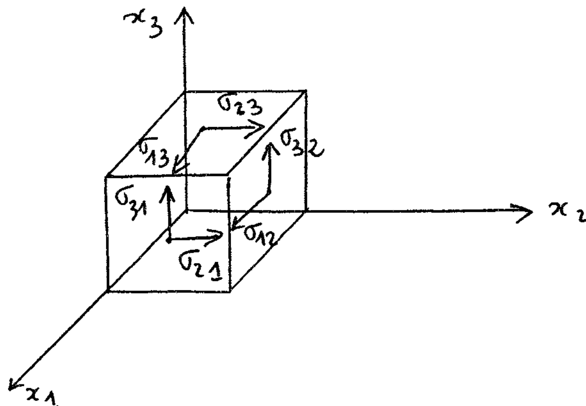
$$\boxed{\begin{array}{c}\sigma_{31} = \sigma_{13} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21}\end{array}}$$

$$\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}} \qquad (3)$$

Il y a réciprocité des contraintes tangentielles. Les σ_{ij} forment donc un <u>tenseur symétrique</u>.

<u>Remarques</u>: 1/ Cette propriété découle du fait qu'on suppose qu'il n'existe pas de champ de moment (par exemple une action magnétique). Dans le cas contraire, le tenseur des contraintes n'est plus symétrique.

2/ Interprètation physique (fig. 4)



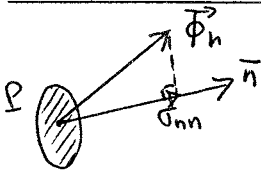
<u>Figure 4</u>

Exercice : Rélation de Cunchy

Montrer que si l'on considère deux facettes passant par le même point de vecteurs contraintes et de normales respectives $\vec{\phi}_n, \vec{n}$ et $\vec{\phi}_{n'}, \vec{n'}$, on a $\vec{\phi}_n.\vec{n'} = \vec{\phi}_{n'}.\vec{n}$

III.1.2. Calcul des contraintes normales et tangentielles

Contrainte normale σ_{nn}



$$\sigma_{nn} = \vec{\phi}_n.\vec{n} = X_1 n_1 + X_2 n_2 + X_3 n_3 = X_i n_i$$

$$\boxed{\sigma_{nn} = \sigma_{ij} n_i n_j}$$

$$= \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{12}\ n_2 n_1 + \sigma_{13} n_1 n_3 + \ldots$$

$$\boxed{\sigma_{nn} = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^3 + 2\ \sigma_{12} n_1 n_2 + 2\sigma_{23} n_2 n_3 + 2\ \sigma_{13} n_1 n_3} \qquad (4)$$

Présentation matricielle :

$$\sigma_{nn} = [\tilde{X}]\,[n] = [\tilde{n}]\,[X]$$

$$\boxed{\sigma_{nn} = [\tilde{n}]\ [\sigma]\ [n]} \qquad (4')$$

C'est la forme quadratique associée à la matrice symétrique $[\sigma]$ et développée par rapport au vecteur n.

Contrainte tangentielle : τ_{nt} contrainte tangentielle quelconque obtenue par projection sur une direction $\vec{t}$ du plan dS.

$\vec{n}, \vec{t}, \vec{t'}$, forment un trièdre trirectangle.

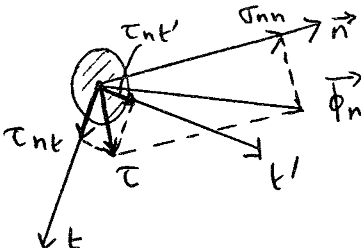


Figure 5

$\vec{t}\ \left|\ \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{matrix}\right.$ $\quad\vec{t}$ et $\vec{t'}$ sont perpendiculaires à n

$$\tau_{nt} = \vec{\phi}_n.\vec{t} = X_1 t_1 + X_2 t_2 + X_3 t_3 = X_i t_i = \sigma_{ij} n_j t_i$$

$$\tau_{nt} = (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3)\ t_1 + \ldots$$

$$\tau_{nt} = \sigma_{11}n_1t_1 + \sigma_{22}n_2t_2 + \sigma_{33}n_3t_3 + \sigma_{12}(n_2t_1 + n_1t_2) + \sigma_{23}(n_3t_2 + n_2t_3)$$

$$+ \sigma_{13}(n_1t_3 + n_3t_1)$$

Présentation matricielle

$$\tau_{nt} = \widetilde{[t]}[X] = \widetilde{[t]}[\sigma][n]$$

C'est la forme polaire associée à la matrice symétrique $[\sigma]$ et développée par rapport aux vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{t}$.

Remarque : la contrainte de cisaillement totale est τ

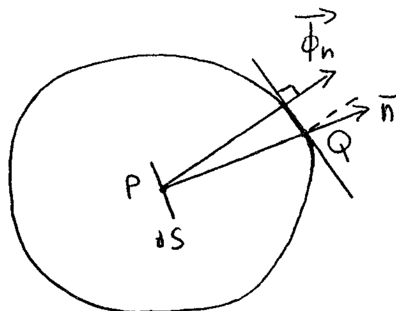
$$\tau^2 = \Phi_n^{\ 2} - \sigma_{nn}^{\ 2}$$

III.2. - Répartition des contraintes autour d'un point

III.2.1. - Quadrique de Cauchy. Eléments principaux en P

En un point P et pour un élément de surface dS de normale $\vec{n}$, on peut représenter la valeur de la contrainte normale σ_{nn} en portant sur la normale positive un vecteur (fig.6) PQ de longueur :

$$r = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{nn}}}$$



$$\vec{n} \left| \begin{array}{l} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{array} \right. \qquad \overline{PQ} \left| \begin{array}{l} x_1 = r\,n_1 \\ x_2 = r\,n_2 \\ x_3 = r\,n_3 \end{array} \right.$$

Figure 6

Le lieu géométrique de l'extrémité du vecteur $\overline{PQ}$ est donné par :

$$r^2\sigma_{nn} = \pm 1$$

soit $\sigma_{11}x_1^2 + \sigma_{22}x_2^2 + \sigma_{33}x_3^2 + 2\sigma_{12}x_1x_2 + 2\sigma_{23}x_2x_3 + 2\sigma_{13}x_1x_3 = \pm 1$

Le signe + correspondant au cas où σ_{nn} est positif
Le signe - " " négatif.

C'est l'équation générale d'une quadrique rapportée à un système d'axes dont l'origine est en son centre. Cette quadrique est soit un ellipsoïde soit un hyperboloïde (se reporter au § I.4). La quadrique de Cauchy n'est autre que la quadrique représentative du tenseur des contraintes ou quadrique des contraintes, dont l'équation en notation indicielle est :

$$\sigma_{ij}x_ix_j = \pm 1 \qquad (7)$$

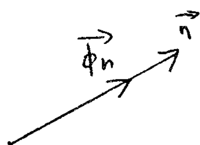
Rapportée à leurs axes principaux (cf. § I.4.1), l'équation de la quadrique s'écrit :

$$\sigma_1x_1^2 + \sigma_2x_2^2 + \sigma_3x_3^2 = \pm 1$$

Les demi-axes ont pour longueur $\frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}, \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}}, \frac{1}{\sqrt{\sigma_3}}$, σ_1, σ_2 et σ_3 pouvant être > 0 ou < 0.

σ_1, σ_2 et σ_3 sont les contraintes principales et les axes principaux sont les directions principales des contraintes.

Les axes principaux de la quadrique sont des directions privilégiées : ce sont les normales à des éléments qui sont soumis uniquement à une contrainte normale. La recherche des directions et des contraintes principales revient à trouver les directions telles que (cf. § I.7).



$$\vec{\phi}_n = \lambda\vec{n}$$

soit en écriture tensorielle :

$$\sigma_{ij}n_j = \lambda n_i \ (8) \quad \text{ou} \quad (\sigma_{ij} - \lambda\,\delta_{ij})\,n_j = 0$$

$\delta_{ij}n_j = n_i$ $\quad \delta_{ij}$ = symbole de Kronecker (cf. § I.2.1)

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

En écriture matricielle :

$$([\sigma] - \lambda[1]) \; [n] = 0 \qquad (8)$$

$[1]$ = matrice unité = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

On reconnait la recherche des vecteurs et valeurs propres d'un tenseur. Pour qu'il y ait une solution non triviale il faut que le déterminant de $([\sigma] - \lambda [1])$ soit nul (ou le déterminant de $(\sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij})$. En développant, on obtient une équation du 3ème degré en λ (équation séculaire) dont les 3 racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont toujours réelles car σ_{ij} est symétrique : on a $\sigma_1 = \lambda_1$, $\sigma_2 = \lambda_2$, $\sigma_3 = \lambda_3$.
Les trois directions propres correspondantes forment un trièdre trirectangle qui sont les directions principales des contraintes.

Leur détermination se fait en résolvant le système (8) pour chaque racine de λ:

$$\begin{cases} (\sigma_{11} - \lambda)\, n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = 0 \\ \sigma_{12} n_1 + (\sigma_{22} - \lambda) n_2 + \sigma_{13} n_3 = 0 \\ \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + (\sigma_{33} - \lambda) n_3 = 0 \end{cases}$$

avec $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

Le tenseur des contraintes ramené à ses axes principaux s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Remarques : 1/ La propriété du rayon normal de la quadrique (§ I.6.2 et fig.6) permet de déterminer la direction de la force résultante $\vec{\phi}_n dS$ appliquée à l'aire dS.

On mène parallèlement à $\vec{n}$, le rayon vecteur de la quadrique de longueur r, il coupe en Q la surface de la quadrique. La direction de $\vec{\phi}_n$ est donnée par la normale en Q à la quadrique. Evidemment, si Q est sur l'un des 3 axes principaux, $\vec{\phi}_n$ est parallèle à $\vec{n}$: il n'y a pas de composante de cisaillement.

2/ Si le tenseur des contraintes est ramené à ses axes principaux, les contraintes normales et tangentielles deviennent :

$$\begin{cases} \sigma_{nn} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ \tau_{nt} = \sigma_1 n_1 t_1 + \sigma_2 n_2 t_2 + \sigma_3 n_3 t_3 \end{cases} \qquad (9)$$

n_1, n_2, n_3 étant les cosinus directeurs de la normale par rapport aux axes principaux et t_1, t_2, t_3 celles de la tangente $\vec{t}$.

3/ Cas particuliers

- $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$: la quadrique des contraintes est de révolution autour de l'axe σ_3. Dans le plan σ_1 σ_2 , la section de la quadrique est un cercle : toutes les directions de ce plan sont principales.
- $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ la quadrique est une sphère. Toutes les directions sont principales. Un tel point est dit point singulier.

III.2.2. - Les invariants de σ_{ij} (cf. § I.7)

On a vu que la recherche des directions principales conduit à la solution de $(\sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij})x_j = 0$

Il n'y a des solutions que si $|\sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0$

$$\text{soit } \Delta = \begin{vmatrix} \sigma_{11}-\lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}-\lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

où $-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$

Développons Δ :

$$\Delta = (\sigma_{11} - \lambda)\left[(\sigma_{22} - \lambda)(\sigma_{33} - \lambda) - \sigma_{23}^2\right] - \sigma_{12}\left[\sigma_{12}(\sigma_{33} - \lambda) - \sigma_{13}\sigma_{23}\right]$$

$$+ \sigma_{13}\left[\sigma_{12}\sigma_{23} - \sigma_{13}(\sigma_{22} - \lambda)\right]$$

$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ = trace du tenseur σ_{ij}

<u>I_1 est invariant linéaire</u>

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}^2) = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)$$

$\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2$ = mineur relatif à σ_{33}
$\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2$ = " σ_{11}
$\sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{13}^2$ = " σ_{22}

} $I_2 = \sum$ mineurs relatifs aux termes diagonaux

<u>I_2 est l'invariant quadratique</u>

$I_3 = |\sigma_{ij}|$ = déterminant de la matrice des σ_{ij}

$$= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2$$

<u>I_3 est l'invariant cubique</u>

Nous rappelons (cf; § I.7) que I_1, I_2 et I_3 sont des invariants car si on part d'un autre système d'axes, le tenseur des contraintes est σ'_{ij} et l'équation séculaire s'écrira :

$$-\lambda^3 + I'_1\lambda^2 - I'_2\lambda + I'_3 = 0$$

Mais on doit retrouver les mêmes contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ donc les mêmes racines de l'équation séculaire (seuls les cosinus directeurs des directions principales sont différents) ; ceci implique donc que $I_1 = I'_1$, $I_2 = I'_2$ et $I_3 = I'_3$.
Par rapport aux axes principaux

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{cases}$$

III.2.3. - Ellipsoïde de Lamé (fig. 7)

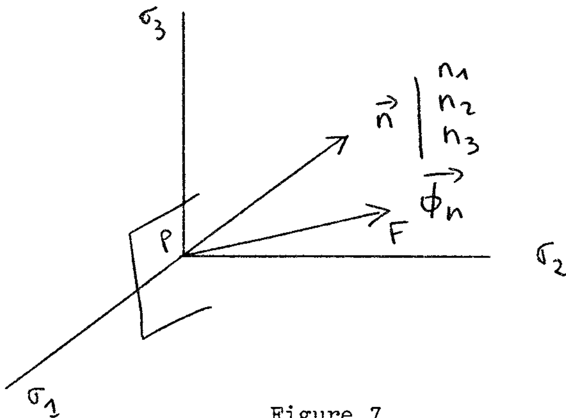


Figure 7

Considérons l'extrémité F du vecteur contrainte sur un élément ds défini par sa normale positive $\vec{n}$. Prenons pour axes de coordonnées les axes principaux $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.
Le point F a pour coordonnées :

$$\begin{cases} X_1 = \sigma_1 n_1 \\ X_2 = \sigma_2 n_2 \\ X_3 = \sigma_3 n_3 \end{cases}$$

Le lieu géométrique de F lorsque ds décrit tout l'espace autour du point P est :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad \text{soit} \quad \frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{x_3^3}{\sigma_3^2} = 1$$

C'est un ellipsoïde rapporté à ses axes principaux, dont les demi-axes sont $|\sigma_1|$, $|\sigma_2|$ et $|\sigma_3|$.

C'est l'ellipsoïde de la propriété définie au § I.9.

III.2.4. - Recherche des éléments principaux quand on connait a priori une direction principale σ_3

- 1 - Formules de bases (fig. 8)

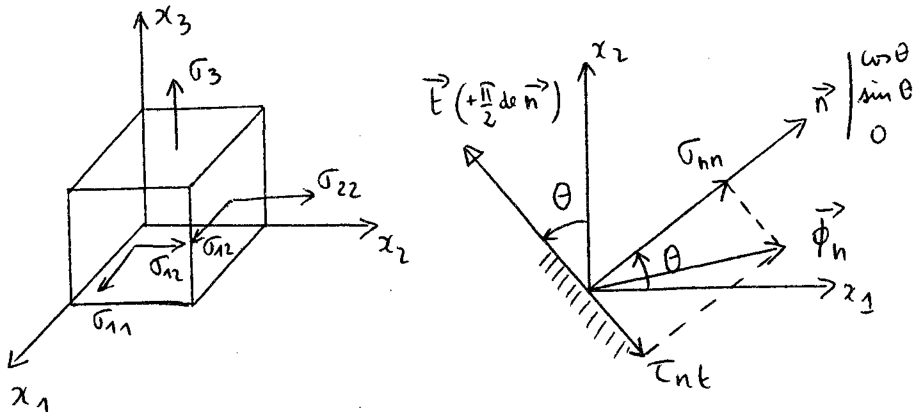


Figure 8

Par rapport aux axes x_1, x_2, σ_3, le tenseur σ_{ij} a la forme :

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Calculons $\vec{\phi}_n$ pour une facette parallèle à l'axe σ_3 et dont la normale $\vec{n}$ a pour coordonnées $\begin{vmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$

$$[X] = [\sigma]\,[n] \qquad\qquad X_i = \sigma_{ij}\, n_j$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11}\cos\theta + \sigma_{12}\sin\theta \\ \sigma_{12}\cos\theta + \sigma_{22}\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

La contrainte normale σ_{nn} est égale à (relation III.4)

$$\sigma_{nn} = \sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2$$

$$= \sigma_{11}\cos^2\theta + \sigma_{22}\sin^2\theta + 2\,\sigma_{12}\cos\theta\,\sin\theta$$

$$\sigma_{nn} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\cos 2\theta + \sigma_{12}\sin 2\theta$$

$$\cos^2 = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2 = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

La contrainte tangentielle suivant $\vec{t}$ $\begin{vmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}$

$\vec{t}$ étant dans le plan x_1, x_2, est égale à (relation III.5)

$$\tau_{nt} = -\,\sigma_{11}\sin\theta\,\cos\theta + \sigma_{22}\sin\theta\,\cos\theta + \sigma_{12}\,(-\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$\tau_{nt} = \frac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2}\sin 2\theta + \sigma_{12}\cos 2\theta$$

- 2 - Méthode algébrique

$\vec{n}$ est direction principale si $\tau_{nt} = 0$ c'est-à-dire pour $\theta = \varphi$

soit

$$\boxed{tg\, 2\varphi = \frac{2\,\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}}} \qquad (10) \qquad \begin{matrix} 2\varphi \text{ à } \pi \text{ près} \\ \varphi \text{ à } \frac{\pi}{2} \text{ près} \end{matrix}$$

$$\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \sigma\varphi = \dfrac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \dfrac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} \cos 2\varphi + \sigma_{12} \sin 2\varphi \\ \sigma\varphi' = \dfrac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \dfrac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} \cos 2\varphi - \sigma_{12} \sin 2\varphi \end{cases}$$

or $$\sigma_{12} = \frac{tg 2\varphi\,(\sigma_{11}-\sigma_{22})}{2}$$

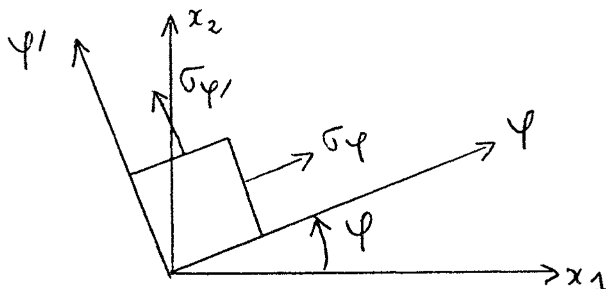


Figure 9

$$\sigma\varphi = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} \cdot \cos 2\varphi + \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\, tg\, 2\varphi \quad \sin 2\varphi$$

soit

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma\varphi &= \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} \quad \frac{1}{\cos 2\varphi} \\ \sigma\varphi' &= \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} - \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} \quad \frac{1}{\cos 2\varphi} \end{aligned}} \qquad (11)$$

On adopte la convention : $\sigma_\varphi \geqslant \sigma_{\varphi'}$ algébriquement

$$\sigma_\varphi - \sigma_{\varphi'} \geqslant 0 \quad \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\cos 2\varphi} \geqslant 0 \quad \text{c'est-à-dire que}$$

$\cos 2\varphi$ doit être du signe de $\sigma_{11} - \sigma_{22}$

Eliminons φ entre $tg 2\varphi$ et σ_φ (ou $\sigma_{\varphi'}$) :

$$\frac{1}{\cos^2 2\varphi} = 1 + tg^2 2\varphi = \frac{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2}$$

$$\frac{1}{\cos 2\varphi} = \pm \frac{\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$$

on prend le signe + pour avoir $\sigma_\varphi > \sigma_{\varphi'}$ ($\cos 2\varphi$ est alors du signe de $\sigma_{11} - \sigma_{22}$)

d'où

$$\sigma_{\varphi,\varphi'} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 4\,\sigma_{12}^2} \qquad (12)$$

D'où le tenseur ramené à ses axes principaux $\varphi, \varphi', \sigma_3$

$$\begin{bmatrix} \sigma_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varphi'} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Exercice : Retrouver les valeurs de σ_φ et $\sigma_{\varphi'}$ à partir de la recherche des valeurs propres de la matrice $[\sigma]$.

- 3 - Méthode graphique. Construction du cercle de Mohr
(cf. § I.8)

Problème 1 : On suppose connus les axes φ, φ' et $\sigma\varphi$, $\sigma\varphi'$
Trouver σ_{nn} et τ_{nt} pour une facette quelconque n.

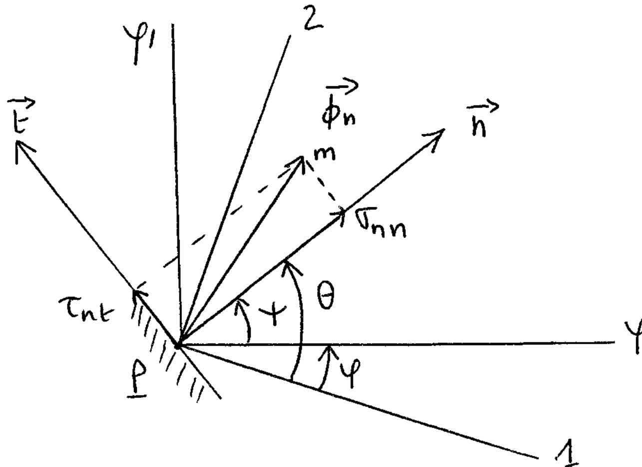


Figure 10

On a

$$\begin{cases} \sigma_{nn} = \dfrac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \dfrac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{12}\sin 2\theta \\ \tau_{nt} = -\dfrac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{12}\cos 2\theta \end{cases}$$

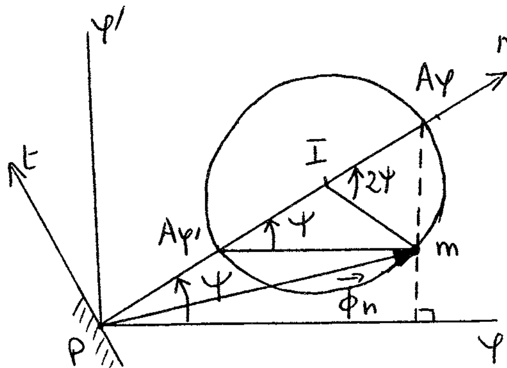
ou

$$\begin{cases} \sigma_{nn} = \dfrac{\sigma\varphi+\sigma\varphi'}{2} + \dfrac{\sigma\varphi-\sigma\varphi'}{2} \cos 2\psi \\ \tau_{nt} = -\dfrac{\sigma\varphi-\sigma\varphi'}{2} \sin 2\psi \end{cases}$$

C'est l'équation paramétrique d'un cercle, lieu de l'extrémité m de $\vec{\phi}_n$ dans les axes mobiles $\vec{n}$ et $\vec{t}$.

$$\left(\sigma_{nn} - \frac{\sigma\varphi+\sigma\varphi'}{2}\right)^2 + \tau_{nt}^{\ 2} = \left(\frac{\sigma\varphi-\sigma\varphi'}{2}\right)^2$$

Le centre I du cercle est sur Pn au point $\frac{\sigma\varphi+\sigma\varphi'}{2}$ et son rayon est égal à $\frac{\sigma\varphi-\sigma\varphi'}{2}$ (fig. 11)



$\overline{PA_{\varphi}} = \sigma\varphi$

$\overline{PA_{\varphi'}} = \sigma\varphi'$

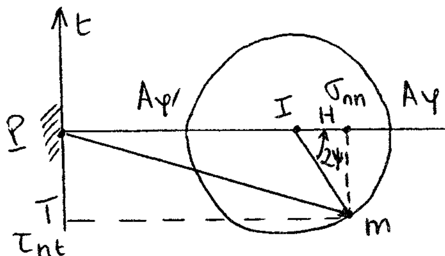
$\overline{PI} = \frac{\sigma\varphi+\sigma\varphi'}{2}$

$\sigma_{nn} = \overline{PI} + R \cos 2\psi$

$\tau_{nt} = - R \sin 2\psi$

Figure 11

Remarque 1 : L'axe φ est parallèle à $A_{\varphi'}m$ d'où la construction de Mohr (fig. 12)



$\overline{PH} = \sigma_{nn}$

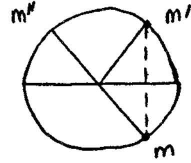
$\overline{PT} = \tau_{nt}$

Figure 12

Remarque 2 : Quand n tourne d'un angle ψ par rapport à l'axe φ, on tourne d'un angle 2ψ en sens inverse.

- Les contraintes normales σ_{nn} sont comprises entre $\sigma\varphi' \leq \sigma_{nn} \leq \sigma\varphi$
- Cissions particulières : cission maximale pour $\psi = \pm 45°$ $\tau_{max} = \frac{\sigma\varphi - \sigma\varphi'}{2}$

cission pure seulement si σ_φ et $\sigma_{\varphi'}$ sont de signe contraire.



- points particuliers :
  m' représente une facette symétrique par rapport à l'axe φ
  m" une facette perpendiculaire à celle représentée par m.

Remarque 3 : lieu de m dans les axes φ et φ'

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\cos\theta + \sigma_{12}\sin\theta \\ \sigma_{12}\cos\theta + \sigma_{22}\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_\varphi \\ X_{\varphi'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_\varphi \cos\psi \\ \sigma_{\varphi'} \sin\psi \end{bmatrix}$$

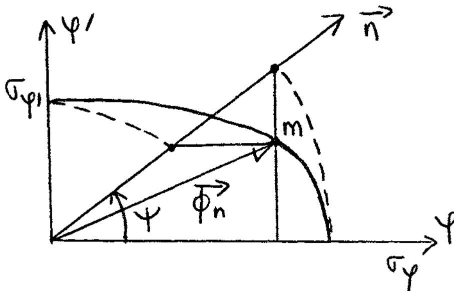


Figure 13

$$\begin{cases} X = \sigma_\varphi \cos\psi \\ Y = \sigma_{\varphi'} \sin\psi \end{cases}$$

est l'équation paramétrique d'une ellipse (fig. 13) qui est l'ellipse de Lamé (cf. § III.2.3)

$$\frac{X^2}{\sigma_\varphi^2} + \frac{Y^2}{\sigma_{\varphi'}^2} = 1$$

Si $\sigma_\varphi = \sigma_{\varphi'}$, l'ellipse devient un cercle et en chaque point $\vec{\sigma}_n$ est parallèle à $\vec{n}$ et $\sigma_{nn} = \sigma_\varphi$

Problème 2 :

On connait σ_{11}, σ_{22} et σ_{12}. Déterminer les éléments principaux (figure 14).

$\overline{PH_1} = \sigma_{11}$
$\overline{PH_2} = \sigma_{22}$
$\overline{H_1m_1} = \sigma_{12}$
$\overline{H_2m_2} = -\sigma_{12}$
(cf § III.2.4.1)

Figure 14

- On prend t à $+\pi/2$ de n (sens > 0 étant donné par 1, 2)
- On place m_1 puis m_2 (ou I) d'où le cercle de Mohr
- On relève $\overline{PA\varphi} =$ et $\overline{PA\varphi'} = \sigma_{\varphi'}$
- L'angle ψ_1 est l'angle entre l'axe φ et 1. Si la construction est faite sur n// à l'axe 1, $A\varphi'$ m_1 est parallèle à l'axe φ.

Remarque : La méthode algébrique donne φ alors que la méthode graphique donne ψ_1 avec $\varphi = -\psi_1$.

III.2.5. - Tricercle de Mohr

- 1 - Position du problème : c'est une représentation plane du faisceau des contraintes fondamentales. On cherche à représenter l'état de contrainte sur un élément de surface ds entourant le point P : cherchons le lieu de m dans les axes mobiles $\vec{n}$, $\vec{t}$, $\vec{t}$ étant dans le plan contenant à la fois $\vec{n}$ et $\vec{\phi}_n$. Soient X_1, X_2, X_3 les axes principaux et σ_1, σ_2, σ_3 les contraintes principales avec la convention d'écriture : $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$ (fig. 15)

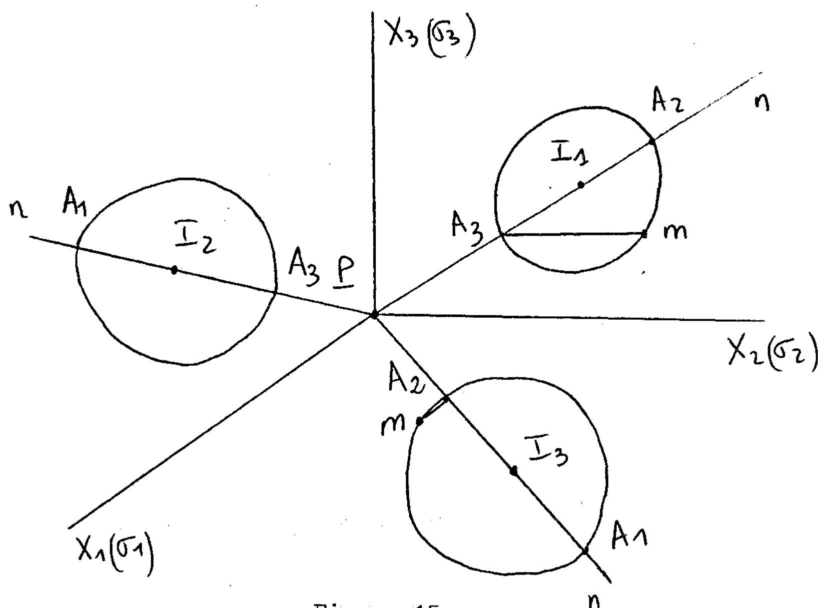


Figure 15

Lorsque la facette // à l'axe X_3 tourne autour de X_3, le point m se trouve sur le cercle de centre I_3 et de diamètre A_1A_2. Il en est de même pour les axes X_1 et X_2.

Pour une facette quelconque (non parallèle à l'un des axes principaux), on va montrer que le point m représentatif se situe obligatoirement dans la zone hachurée du diagramme (σ_{nn}, τ_{nt}) Fig. 16

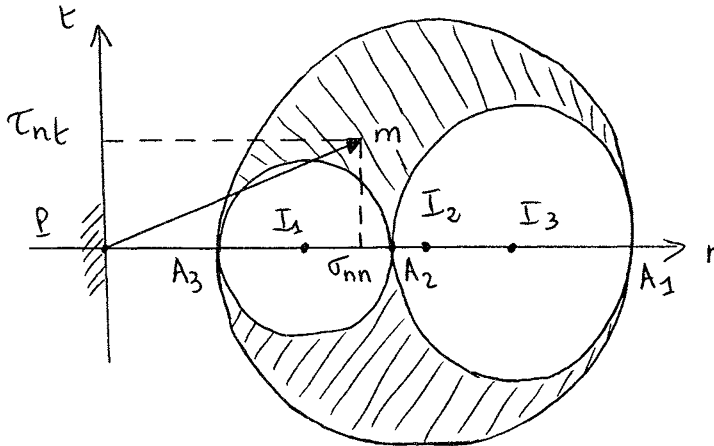


Figure 16

- 2 - Mise en équation (fig 17)

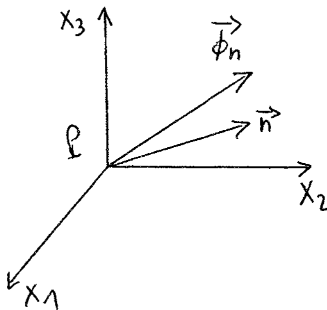


Figure 17

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Appliquons la relation III.9

On a $\sigma_{nn} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$

$$\left|\vec{\phi}_n^{\,2}\right| = \sigma_{nn}^2 + \tau_{nt}^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$$

d'après la relation III.2 $= \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$

$$\left\{\begin{array}{l} \tau_{nn}^2 + \tau_{nt}^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \\ \sigma_{nn} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ 1 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \end{array}\right. \qquad (13)$$

Il est possible d'attacher à toute facette de normale $\vec{n}$ un point m (σ_{nn},τ_{nt}) dans le plan (σ_{nn},τ_{nt}). Inversement recherchons à quelle condition un point m (σ_{nn}, τ_{nt}) du plan correspond à une facette de normale $\vec{n}(n_1,n_2,n_3)$. Cette condition se ramène simplement à rédoudre le système d'équations (13).

Résolvons le système par rapport à n_1^2, n_2^2, n_3^3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 - \sigma_2^2 & \sigma_2^2 - \sigma_3^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 - \sigma_2 & \sigma_2 - \sigma_3 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (\sigma_1 - \sigma_2)\,(\sigma_2 - \sigma_3) \begin{vmatrix} \sigma_1 + \sigma_2 & \sigma_2 + \sigma_3 & \sigma_3^2 \\ 1 & 1 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\sigma_1 - \sigma_2)\,(\sigma_2 - \sigma_3)\,(\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_2 - \sigma_3)$$

$$= (\sigma_1 - \sigma_2)\,(\sigma_2 - \sigma_3)\,(\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$\Delta_{n1^2} = \begin{vmatrix} \sigma_{nn}^2 + \tau_{nt}^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_{nn} & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\sigma_2 - \sigma_3) \begin{vmatrix} \sigma_{nn}^2 + \tau_{nt}^2 & \sigma_2 + \sigma_3 & \sigma_3^2 \\ \sigma_{nn} & 1 & \sigma_3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\sigma_2 - \sigma_3)\left\{\sigma_{nn}^2 + \tau_{nt}^2 + (\sigma_2 + \sigma_3)\sigma_3 - \sigma_{nn}(\sigma_2 + \sigma_3) - \sigma_3^2\right\}$$

$$\text{soit} \quad n_1^2 = \frac{\Delta n_1^2}{\Delta} = \frac{\sigma_{nn}^2 + \tau_{nt}^2 - \sigma_{nn}(\sigma_3 + \sigma_2) + \sigma_2\,\sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_2)\,(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

et par permutation circulaire

$$n_2^2 = \frac{\sigma_{nn}^2 + \tau_{nt}^2 - \sigma_{nn}(\sigma_3 + \sigma_1) + \sigma_3 \sigma_1}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \qquad (14)$$

$$n_3^2 = \frac{\sigma_{nn}^2 + \tau_{nt}^2 - \sigma_{nn}(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1 \sigma_2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

- 3 - Discussion

Ces trois valeurs représentent les cosinus directeurs (par rapport aux axes principaux) de la normale aux facettes pour lesquelles σ_{nn} et τ_{nt} ont les valeurs choisies. Mais ces deux valeurs ne sont pas quelconques car n_1^2, n_2^2 et n_3^2 sont positifs.

Il faut donc que

$$\begin{cases} \sigma_{nn}^2 + \tau_{nt}^2 - \sigma_{nn}(\sigma_2+\sigma_3) + \sigma_2\sigma_3 \geqslant 0 \\ \sigma_{nn}^2 + \tau_{nt}^2 - \sigma_{nn}(\sigma_1+\sigma_2) + \sigma_1\sigma_2 \leqslant 0 \\ \sigma_{nn}^2 + \tau_{nt}^2 - \sigma_{nn}(\sigma_1+\sigma_2) + \sigma_1\sigma_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ces conditions signifient que le point représentatif doit se trouver dans la partie hachurée du diagramme de la fig. 18 .

En effet :

- la 1ère condition exprime que m est à l'extérieur du cercle centré en I_1 et de rayon $\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$.
- la 2ème condition est vérifiée à l'intérieur du cercle centré en I_2 et de rayon $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$
- la 3ème condition est vérifiée à l'extérieur du cercle centré en I_3 et de rayon $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

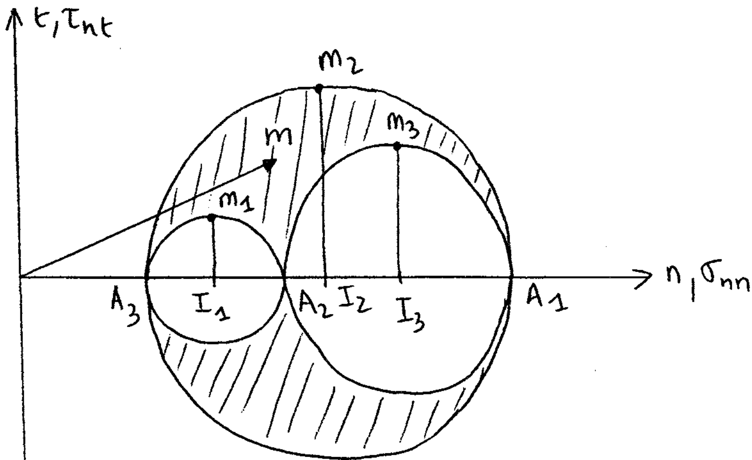


Figure 18

Remarques

On voit sur la figure 18 que :

- les contraintes normales sont comprises entre σ_3 et σ_1
- l'addition d'un état de contrainte sphérique (σ 0 0, 0 σ 0, 0 0 σ) se traduit simplement par une translation d'ensemble du diagramme de Mohr de σ suivant l'axe des σ_{nn}
- lorsque deux contraintes principales sont égales, un des cercles se réduit à un point et les autres cercles sont confondus, le point m se trouvant nécessairement dessus.
- lorsque les trois contraintes principales sont égales, les 3 cercles se réduisent à un point et le point m est confondu avec ce point
- lorsque le point m est situé sur un des cercles, n_1, n_2 ou n_3 est égal à 0 et la facette correspondante contient une direction principale. Dans ce cas, on peut utiliser les résultats obtenus au § III.2.4.

- 4 - Cisaillements principaux (fig. 18)

Pour des facettes passant par l'axe x_1, la cission maximale est égale à (point m_1) :

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

Pour l'axe x_2, point m_2

$$\tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad : \text{contrainte tangentielle maximale} \qquad (15)$$

Pour l'axe x_3, point m_3

$$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Les cosinus directeurs correspondant à chacune de ces cissions maximales peuvent être calculés à partir des relations (III.14).

Pour τ_1 : $n_1 = 0$
$\quad$ 2 : $n_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$
$\quad$ 3 : $n_3 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

Pour τ_2 : $n_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$
$\quad n_2 = 0$
$\quad n_3 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

Pour τ_3 : $n_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$
$\quad n_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$
$\quad n_3 = 0$

Ce sont des facettes passant respectivement par les axes x_1, x_2, x_3 et bissectrices de l'angle que font les deux autres axes principaux.

III.2.6 Tenseur déviateur

Le tenseur des contraintes définit entièrement l'état des contraintes autour d'un point

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{12} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

Le tenseur σ_{ij} peut être décomposé, d'après les propriétés générales des tenseurs, en la somme de deux tenseurs σ^{s}_{ij} et σ^{d}_{ij} avec

$$(16) \qquad \sigma^{s}_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & {}_m \end{pmatrix} \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3} = \frac{\text{trace}[\sigma]}{3} = \frac{I_1}{3} (*)$$

qui représente un état de contrainte très particulier : état de contrainte <u>sphérique</u> (ellipsoïde de Lamé est une sphère) ou hydrostatique correspondant uniquement à un changement de volume.

$$(16) \text{ et } \sigma^{d}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma_{11}-\sigma_{22}-\sigma_{23}}{3} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \frac{2\sigma_{22}-\sigma_{11}-\sigma_{33}}{3} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \frac{2\sigma_{33}-\sigma_{11}-\sigma_{22}}{3} \end{pmatrix}$$

qui correspond au contraire à un état de contrainte sans dilatation volumique mais avec distorsion (ou cisaillement) : σ^{d}_{ij} est appelé <u>tenseur déviateur</u>. Sa trace est nulle

---

$*\sigma_m$ est souvent appelé "contrainte moyenne": c'est en fait la moyenne des contraintes principales.

Les invariants du déviateur sont les suivants :

$$J_1 = 0$$

$$J_2 = -\frac{1}{6}\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{11}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + 6\left(\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{6}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

$$J_3 = \det\left[\sigma^d_{ij}\right]$$

Si on choisit comme axes de coordonnées les axes principaux, les tenseurs σ_{ij}, σ^S_{ij} et σ^d_{ij} prennent la forme

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_3-\sigma_1-\sigma_2}{3} \end{pmatrix}$$

III.2.7. - Contraintes octaédriques

Les ruptures ont tendance à se produire suivant des plans également inclinés sur les 3 aces principaux (la normale est la trissectrice du trièdre) (fig. 19)

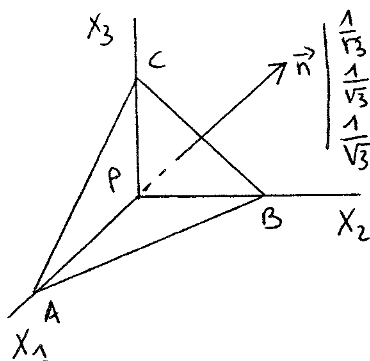


Figure 19

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont donnés

$n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Ainsi, on a (relations III.13)

$$\sigma_{nn} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

$$\sigma_{nn}^2 + \tau^2_{nt} = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$

$$\text{soit } \boxed{\sigma_{nn} = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3} = \sigma_{oct} = \sigma_m}$$

$$\tau_{nt}^2 = \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2}{3} - \frac{(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2}{9}$$

$$= \frac{1}{9}(2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_3\sigma_1)$$

(17)
$$\tau_{oct}^2 = \tau_{nt}^2 = \frac{1}{9}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[(\sigma_1-\sigma_m)^2 + (\sigma_2-\sigma_m)^2 + (\sigma_3-\sigma_m)^2\right]$$

$$\tau_{oct}^2 = \frac{1}{9}(2I_1^2 - 6I_2)$$

On remarque que σ_{oct} et τ_{oct} s'expriment uniquement en fonction des invariants du tenseur des contraintes. Ces valeurs sont les mêmes pour les huit plans identiques à ABC entourant le point P et formant un octaédre. C'est pour cette raison qu'on les appelle contraintes octaédriques.

On peut exprimer τ_{oct} en fonction des σ_{ij} rapportés à des axes quelconques (cf. § III.2.2).

$$\tau_{oct}^2 = \frac{1}{9}\left[2\sigma_{11}^2+2\sigma_{22}^2+2\sigma_{33}^2+4\sigma_{11}\sigma_{22}+4\sigma_{22}\sigma_{33}+4\sigma_{33}\sigma_{11}\right.$$
$$\left. - 6\sigma_{11}\sigma_{22}-6\sigma_{22}\sigma_{33}-6\sigma_{33}\sigma_{11}+6\sigma_{13}^2+6\sigma_{32}^2+6\sigma_{12}^2\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{13}^2)\right]$$

On peut remarquer aussi que : $\tau_{oct}^2 = -\frac{2}{3} J_2$

III.3 - Equations d'équilibre

Les composantes du tenseur des contraintes dans un corps en équilibre sous l'action de forces de surface et de forces de volume doivent vérifier les équations d'équilibre indéfini et les équations d'équilibre à la surface.
Considérons un parallélépipède élémentaire situé à l'intérieur d'un corps soumis à des contraintes (fig. 20).

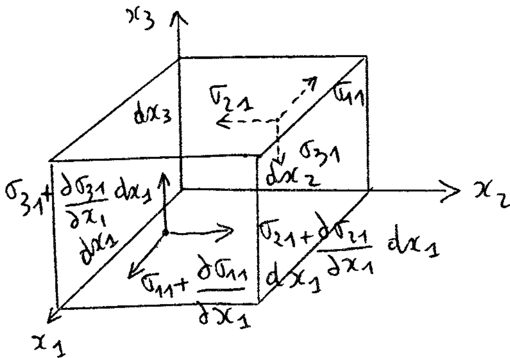


Figure 20

Ecrivons que le parallélépipède est en équilibre : on écrit d'abord que la somme des moments des forces par rapport à chacun des axes est nulle (mouvement de rotation) et on retrouve le fait qu'en l'absence de champ de moments σ_{ij} est un tenseur symétrique.
On écrit ensuite que la résultante des forces appliquées au parallélépipède est nulle. Considérons la projection de cette résultante sur l'axe Ox_1.
Les forces suivant Ox_1 qui s'exercent sur les 2 faces perpendiculaires à Ox_1 sont :

$$-\sigma_{11}dx_2dx_3 + (\sigma_{11} + \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1)\,dx_2dx_3 = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1dx_2dx_3$$

Sur les deux faces perpendiculaires à Ox_2 :

$$\frac{\partial \sigma 12}{\partial x_2} dx_1\ dx_2\ dx_3$$

Sur les deux faces perpendiculaires à Ox_3

$$\frac{\partial \sigma 13}{\partial x_3} dx_1\ dx_2\ dx_3$$

S'il existe un champ de force $\vec{F_v}$, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma 11}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma 12}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma 13}{\partial x_3} + F_{v1} = \rho \frac{d^2 x1}{dt^2}$$

ρ = masse volumique

Suivant les deux autres axes, on obtient des équations identiques. Ainsi, l'équation du mouvement de translation prend la forme :

$$\boxed{\frac{\partial \sigma ij}{\partial x_j} + F_{vi} = \rho \frac{d^2 x_i}{dt^2}} \qquad (18)$$

si $\vec{F_v}$ est la pesanteur : $F_{vi} = \rho g_i$

$$\boxed{\frac{\partial \sigma ij}{\partial xj} + \rho g_i = \rho \frac{d^2 x_i}{dt^2}} \qquad (19)$$

C'est l'équation fondamentale qui relie les variations spatiales des contraintes dans un corps aux accélérations des éléments de volume. Elle constitue comme nous le verrons ultérieurement, le point de départ de l'étude des oscillations élastiques dans les solides.

Dans le cas où le corps est en équilibre statique, les équations (19) prennent la forme :

$$\boxed{\frac{\partial \sigma ij}{\partial xj} + F_{vi} = 0} \quad (18') \qquad \boxed{\frac{\partial \sigma ij}{\partial xj} + \rho g_i = 0} \quad (19')$$

Ce sont les équations d'équilibre, très utilisées dans la théorie de l'élasticité.

Ces équations peuvent aussi s'écrire :

$$\boxed{\mathrm{div}\sigma_{ij} + F_{vi} = 0} \qquad (18'')$$

Conditions aux limites :

Considérons un point P situé sur la surface du corps (fig. 21) et dont la normale à la surface est $\vec{n}$

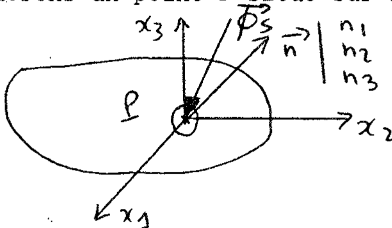


Figure 21

Supposons qu'au point P soit appliquée une force de contact $\vec{\phi}_s$ dont les composantes par unité de surface sont égales à :

$$X_{s1}, X_{s2}, X_{s3}$$

Les contraintes internes doivent en ce point équilibrer les efforts extérieurs soit en appliquant la relation (III.2) :

$$X_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = X_{s1}$$

ou plus généralement : $\boxed{X_{si} = \sigma_{ij}n_j}$ (20)

La condition (20) doit être vérifiée sur toute la surface. Si au point considéré ne s'applique aucune force (la surface est dite libre), on aura alors : $\sigma_{ij}n_j = 0$.

III.4 - Formes particulières prises par le tenseur des contraintes (rapporté à ses axes principaux)

1°/ Contrainte uniaxiale

$$\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C'est le cas d'une tige verticale infiniment longue portant un poids à son extrémité.

2°/ Contrainte biaxiale

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous retrouverons un tel tenseur dans le cas d'une plaque mince.

3°/ Contrainte triaxiale

C'est l'état de contrainte le plus général, présentant trois contraintes principales $\neq 0$.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

4°/ Pression hydrostatique

$$\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -p\delta_{ij} \end{bmatrix}$$

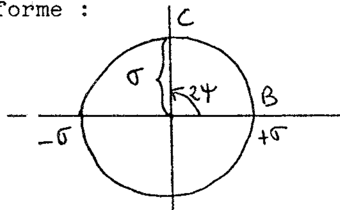
5°/ Contrainte de cisaillement pur

C'est un cas particulier de contrainte biaxiale. Dans une tige longue soumise à une torsion pure se produit une distribution non uniforme de contraintes de cisaillement pur.

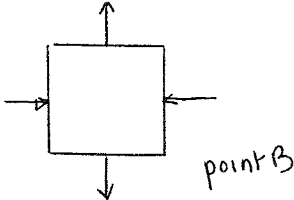
$$\begin{bmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

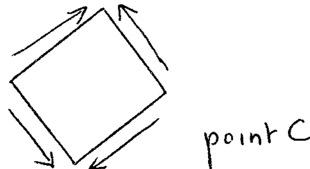
La construction du cercle de Mohr montre que, si l'on fait tourner les axes de 45° autour de Ox_3, la contrainte normale disparaît et le tenseur prend la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Ox_3 est l'axe de cisaillement. Les forces qui agissent sur les faces d'éléments orientés différemment sont les suivantes :





Remarque : Différence entre le tenseur des contraintes et le tenseur représentant des propriétés cristallines

Les tenseurs représentant les propriétés cristallines ont des orientations bien définies dans le cristal et suivent la symétrie cristalline. Ce sont des tenseurs matériels. Par contre le tenseur des contraintes (comme celui de déformation que nous allons voir), peut avoir n'importe quelle orientation à l'intérieur du cristal. Il peut exister aussi bien dans les corps isotropes que dans les cristaux anisotropes. Il ne traduit pas les propriétés d'un cristal mais dépend d'un champ de forces appliquée au solide : de tels tenseurs sont des tenseurs de champ.

CHAPITRE IV

TENSEUR DES DEFORMATIONS

IV.1. - Déplacements et déformations

Soient dans un solide continu non déformé deux points P et Q voisins de coordonnées respectives x_i et x_i+dx_i. Le carré de leur distance est :

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2$$

Supposons que chaque point du solide subisse un déplacement $\vec{u}(x_i)$ défini de façon unique et dépendent des coordonnées du point donné :

P vient en P' de coordonnées $X_i = x_i + u_i$

Q vient en Q' de coordonnées $X'_i = \underbrace{x_i + u_i}_{X_i} + \underbrace{dx_i + du_i}_{dX_i}$

Le carré de la distance des deux points déplacés P'Q' est :

$$dS^2 = \sum_i dX_i^2$$

Nous disons qu'il y a déformation locale si dS^2 est différent de ds^2 (si $dS^2 = ds^2$ il y a déplacement rigide de l'ensemble). Nous n'avons pas fait d'hypothèses sur le déplacement $u(x_i)$ sinon qu'il soit défini et unique en tout point du solide.

Faisons maintenant l'hypothèse que le champ de vecteurs $u(x_i)$ est continu et dérivable.

Considérons un point P de coordonnées x_i au repos. Après déformation P vient en P_1 de coordonnées $x_i + u_i$, le vecteur $\overline{PP_1}$ étant le vecteur déplacement $\vec{u}$ (fig. 1).
Considérons un point Q voisin de P : $\overline{PQ} = [dx_i]$
Après déformation, Q vient en Q_1 :

$$\overline{P_1Q_1} = [dx_i] + [du_i] = [dX_i]$$

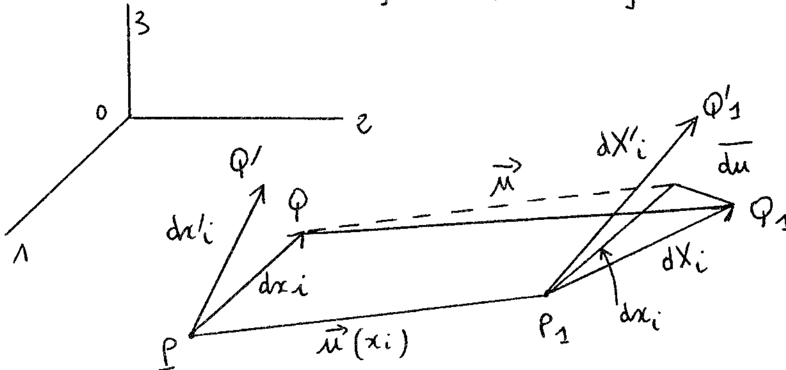


Figure 1

$[du_i]$ est la variation de la distance des deux points P et Q initialement séparés de $[dx_i]$. Comme $[u_i]$ est fonction de x_i, on peut écrire , les déplacements étant supposés petits :

$$\vec{du} \left| \begin{aligned} du_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \\ du_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \\ du_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 \end{aligned} \right.$$

ou

$$\boxed{du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = e_{ij} dx_j} \qquad (1)$$

avec

$$\boxed{e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \qquad (2)$$

La quantité e_{ij} , qui représente le <u>gradient du déplacement</u> est un tenseur du second ordre (e_{ij} relie entre eux les deux vecteurs $\overline{du}$ et $\overline{dx}$, cf. chapitre I), dont la valeur doit être calculée en P. Ainsi le déplacement des points voisins Q et Q' s'écrivent :

$$\left| \begin{array}{l} u_i(Q) = u_i(P) + e_{ij}\ dx_j \\ u_i(Q') = u_i(P) + e_{ij}\ dx'_j \end{array} \right. \qquad \Sigma_j$$

On peut donc écrire :

$$dX_i = dx_i + du_i = dx_i + u_i(Q) - u_i(P)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_i = dx_i + e_{ij}dx_j = (\delta_{ij} + e_{ij})\ dx_j \\ dX'_i = dx'_i + e_{ij}\ dx'_j = (\delta_{ij} + e_{ij})\ dx'_j \end{array} \right. \qquad (3)$$

δ_{ij} = tenseur unité ou symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} \left\{ \begin{array}{l} = 1 \text{ si } i \neq j \\ = 0 \text{ si } i \neq j \end{array} \right.$$

On peut vérifier que $\delta_{ij}\ \delta_{jk} = \delta_{ik}$

$$\delta_{ij}T_{jk} = T_{ik} \qquad \delta_{ij}V_iV_j = V_kV_k = \left|\vec{V}\right|^2$$

$$\delta_{kk} = 3$$

Comparons les produits scalaires $\overrightarrow{dx}.\ \overrightarrow{dx'}$ et $\overrightarrow{dX}.\ \overrightarrow{dX'}$

$$\overrightarrow{dX}.\overrightarrow{dX'} = dX_i dX'_i = (\delta_{ik}+e_{ik})\ (\delta_{ij}+e_{ij})\ dx_k dx'_j$$

$$= (\delta_{jk}+e_{jk}+e_{kj}+e_{ik}e_{ij})\ dx_k dx'_j$$

$$= P_{kj}\ dx_k dx'_j$$

avec

$$P_{ij} = \delta_{ij} + 2\,\Delta_{ij}$$
$$\Delta_{ij} = \frac{1}{2}\left[e_{ij} + e_{ji} + e_{ki}e_{kj}\right] \qquad (4)$$

$$\Delta_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right] \qquad \Sigma_k$$

On a ainsi :

$$\overrightarrow{dX}.\overrightarrow{dX'} = (\delta_{ij} + 2\,\Delta_{ij})\,dx_i dx'_j$$
$$= dx_j\,dx'_j + 2\,\Delta_{ij}\,dx_i dx'_j$$
$$= \overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dx'} + 2\,\Delta_{ij}\,dx_i\,dx'_j$$

d'où $\overrightarrow{dX}.\overrightarrow{dX'} - \overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dx'} = 2\,\Delta_{ij}\,dx_i\,dx'_j$ (5)

P_{ij} et Δ_{ij} sont des tenseurs symétriques de rang deux.

Dans le cas où les produits scalaires sont conservés, Δ_{ij} est nul et P_{ij} est alors égal à δ_{ij} : c'est le cas d'un déplacement rigide de l'ensemble du solide. Ainsi P_{ij} et Δ_{ij} donnent une mesure de la déformation du milieu et peuvent donc être utilisés comme tenseurs de déformation : ce sont respectivement les tenseurs de Cauchy et de Green.

IV.2. - Déformations infinitésimales

IV.2.1. - Signification géométrique des e_{ij}

Les expressions précédentes se simplifient si les déplacements et les composantes du gradient du déplacement sont petits : c'est-à-dire si

$$du_i \ll dx_i \quad \text{et si} \quad e_{ij} \ll 1$$

Dans ces conditions, on peut donner une signification géométrique simple aux e_{ij}.
Considérons deux positions particulières du vecteur $\overline{PQ}$: l'une parallèle à l'axe Ox_1, l'autre parallèle à l'axe Ox_2 (fig. 2).
Examinons la déformation de l'élément rectangulaire en P.

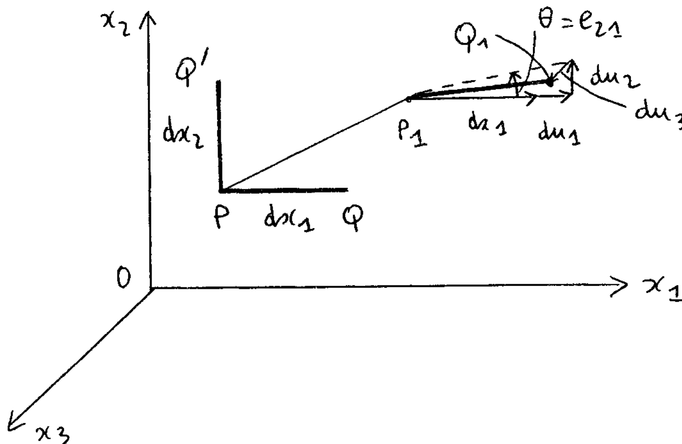


Figure 2

Pour le vecteur $\overline{PQ}$, on a : $dx_2 = 0$

soit :

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 = e_{11} dx_1$$

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 = e_{21} dx_1$$

$$du_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 = e_{31} dx_1$$

Donc e_{11} mesure l'allongement par unité de longueur de PQ dans la direction Ox_1.

e_{21} mesure la rotation de PQ (le sens positif étant le sens inverse des aiguilles d'une montre) vers l'axe Ox_2, cette rotation étant effectuée autour de l'axe Ox_3.

On a en effet :

$$tg\,\theta = \frac{du_2}{dx_1 + du_1} \simeq \theta \simeq \frac{du_2}{dx_1}$$

D'une manière générale :

- e_{ii} représente l'allongement par unité de longueur parallèlement à l'axe Ox_i d'un segment initialement parallèle à cet axe Ox_i
- e_{ij} teprésente la rotation vers Ox_i d'un élément linéaire parallèle à Ox_j, cette rotation étant effectuée autour de l'axe Ox_k.

IV.2.2. - Décomposition de la déformation. Rotation et déformation pure

Le tenseur $\left[e_{ij}\right]$ représente-t-il bien la déformation au point P ? Si oui, les composantes du tenseur doivent s'annuler quand il n'y a pas de déformation. Or ceci n'est pas vrai.

Imposons en effet au corps une rotation infiniment petite de vecteur $\vec{\omega}$: le déplacement du point P est égal à (fig. 3).

$$\overrightarrow{PP_1} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} \qquad \overrightarrow{OP} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \qquad \vec{\omega} \begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix}$$

Figure 3

$$\overrightarrow{PP_1} = \begin{bmatrix} qx_3 - rx_2 \\ rx_1 - px_3 \\ px_2 - qx_1 \end{bmatrix}$$

De même,

$$\overrightarrow{QQ_1} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OQ}$$

$$\overrightarrow{OQ} \begin{vmatrix} x_1 + dx_1 \\ x_2 + dx_2 \\ x_3 + dx_3 \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{PQ} \begin{vmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{vmatrix}$$

soit $\overline{P_1Q_1} = \overline{P_1P} + \overline{PQ} + \overline{QQ_1}$

$$\overline{dX} = \overline{dx} + \overline{du}$$

$$\overline{du} = \overline{P_1P} + \overline{QQ_1} = \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{PQ})$$

$$\overline{du} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{dx}$$

$$\begin{vmatrix} du_1 = q\ dx_3 - r\ dx_2 \\ du_2 = r\ dx_1 - p\ dx_3 \\ du_3 = p\ dx_2 - q\ dx_1 \end{vmatrix}$$

ou $\left[du_i\right] = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \left[dx_i\right]$

soit en notation matricielle $\left[du\right] = \left[\omega\right] \left[dx\right]$ (6)

ou tensorielle $du_i = \omega_{ij}\, dx_j$

ω_{ij} étant un tenseur antisymétrique.

$$\left[\omega\right] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \omega_{12} = -r \\ \omega_{13} = q \\ \omega_{23} = -p \end{vmatrix}$$

Inversement, chaque fois qu'un déplacement infiniment petit se mettra sous cette forme, ce sera une rotation $\vec{\omega}\,(p,q,r)$.
On voit donc que dans le cas d'une rotation, le tenseur e_{ij} n'est pas nul mais est antisymétrique.
D'après la définition de e_{ij}, le déplacement du point Q voisin de P, peut s'écrire :

$$u_i(Q) = u_i(P) + e_{ij}\, dx_j = u_i(P) + du_i$$

$$= u_i(P) + \frac{1}{2}\,(e_{ij} + e_{ji})\, dx_j + \frac{1}{2}\,(e_{ij} - e_{ij})\, dx_j$$

$$= u_i(P) + \varepsilon_{ij}\, dx_j + \omega_{ij}\, dx_j$$

en posant

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\,(e_{ij} + e_{ji}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\,(e_{ij} - e_{ji}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (7)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

ε_{ij} est un <u>tenseur symétrique</u> car $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$
ω_{ij} est un <u>tenseur antisymétrique</u> car $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$

On distingue ici la contribution de 3 termes pour le déplacement du point Q :

- $u_i(P)$ représente une simple translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{PP_1}$
- $\omega_{ij}\, dx_j$ représente une rotation de vecteur $\vec{\omega}$ (relation 6)

$$\vec{\omega} = \begin{vmatrix} \omega_{32} = -\omega_{23} \\ \omega_{13} = -\omega_{31} \\ \omega_{21} = -\omega_{12} \end{vmatrix} \qquad \text{ou encore } \vec{\omega} = \frac{1}{2}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{u}$$

- $\varepsilon_{ij}\, dx_j$ représente la déformation proprement dite ou déformation pure.

La partie symétrique ε_{ij} du tenseur gradient de déplacement exprime la déformation pure alors que sa partie antisymétrique ω_{ij} représente la rotation (tout tenseur peut être décomposé en deux parties : une partie symétrique et une partie antisymétrique).

IV.2.3. - Déformations pures

Dans le cas de déformations infinitésimales, l'expression (IV.4) se simplifie : on peut en effet négliger les doubles produits $e_{ki}\, e_{kj}$ devant e_{ij} et e_{ji}.

On a ainsi $\Delta_{ij} = \frac{1}{2}\,(e_{ij}+e_{ji}) = \varepsilon_{ij}$ (8)

La signification des composantes du tenseur ε_{ij} apparait simplement si on considère la relation (5) ; en effet, on a :

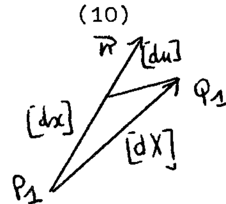
$$\overrightarrow{dX}.\overrightarrow{dX'} - \overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dx'} = 2\, \varepsilon_{ij}\, dx_i dx'_j \qquad (9)$$

IV.2.3.1. Dilatation linéaire unitaire dans une direction quelconque

Appliquons la relation (9) dans le cas où $\overline{dx} = \overline{dx'}$
$\overline{dX} = \overline{dX'}$ (fig. 5)

On a donc $dS^2 - ds^2 = 2\varepsilon_{ij}\ dx_i dx_j$ (10)

$dS^2 = dX_i^{\ 2}$ $\qquad ds^2 = dx_i^2$



Considérons le vecteur unitaire $\vec{n}$
porté par $\vec{dx}$: on a donc
$\vec{dx} = ds\ \vec{n}$ soit $dx_i = ds\ n_i$

et posons $dS = (1+\varepsilon_{nn})\ ds \quad \varepsilon_{nn} = \dfrac{dS-ds}{ds}$ (11)

ε_{nn} étant la dilatation linéaire dans la direction n

La relation (10) s'écrit donc :

$$\frac{dS^2 - ds^2}{ds^2} = 2\ \varepsilon_{ij}\ n_i n_j$$

soit $1 + \varepsilon_{nn} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{ij} n_i n_j} \simeq 1 + \varepsilon_{ij} n_i n_j$

$$\boxed{\varepsilon_{nn} = \varepsilon_{ij} n_i n_j} \qquad (12)$$

Soit en développant :

$$\varepsilon_{nn} = \varepsilon_{11} n_1^{\ 2} + \varepsilon_{22} n_2^{\ 2} + \varepsilon_{33} n_3^{\ 2} + 2\varepsilon_{12} n_1 n_2 + 2\varepsilon_{23} n_2 n_3 + 2\varepsilon_{13} n_1 n_3$$

Cette relation est analogue à la relation(III.4) établie pour la contrainte normale σ_{nn}.

Notation matricielle : par analogie avec σ_{nn}(III.4')

$$\varepsilon_{nn} = [\tilde{n}][\varepsilon][n] \qquad (12')$$

Remarque : si $\vec{n}$ est parallèle à l'axe Ox_1, $n_1 = \delta_{i1}$ et on a

$$\varepsilon_{nn} = \varepsilon_{11}$$

De même pour les axes Ox_2 et Ox_3.
Les composantes diagonales de ε_{ij} représentent donc la dilatation linéaire unitaire selon les axes de coordonnées.

IV.2.3.2. Distorsion d'un angle quelconque $(\vec{n},\vec{t})$ (fig. 5)

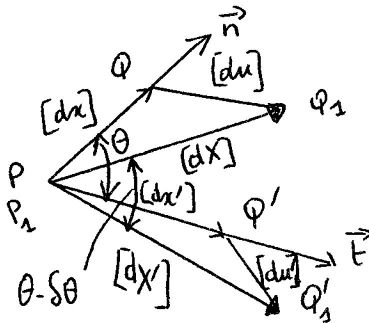


Figure 5

Appliquons la relation (9) aux deux vecteurs $\vec{dx}$ et $\vec{dx'}$ et respectivement parallèles aux directions $\vec{n}$ et $\vec{t}$ faisant entre elles un angle θ (fig. 5).
On a $\vec{dx} = ds\,\vec{n}$ $\qquad \vec{dx'} = ds'\,\vec{t}$
et $\vec{n}.\vec{t} = \cos\theta$
Soit $\varphi = \theta - \delta\theta$ l'angle $(\vec{dX}, \vec{dX'})$, $\delta\theta$ étant la distorsion de $(\vec{n},\vec{t})$
Il vient : $\vec{dX}.\vec{dX'} = \vec{dx}.\vec{dx'} + 2\,\varepsilon_{ij}\, dx_i dx'_j$
soit en tenant compte de la relation (11) :

$$|\vec{dX}| = dS = (1 + \varepsilon_{nn})\, ds$$
$$|\vec{dX'}| = dS' = (1 + \varepsilon_{n'n'}) ds'$$

$(1+\varepsilon_{nn})\,(1+\varepsilon_{n'n'})\,ds\,ds'\,\cos\varphi = (\cos\theta + 2\varepsilon_{ij}n_i t_j)\,ds\,ds'$

$\cos(\theta - \delta\theta) = \cos\theta\,\cos\delta\theta + \sin\theta\,\sin\delta\theta$

$\simeq \cos\theta + \sin\theta \times \delta\theta$ si $\delta\theta$ est petit

soit en négligeant les termes du second ordre

$$\boxed{\cos\theta(\varepsilon_{nn}+\varepsilon_{tt}) + \delta\theta\,\sin\theta = 2\,\varepsilon_{ij}n_i t_j} \quad (13)$$

Cas particulier : Si $\vec{n}$ est perpendiculaire à $\vec{t}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\delta\theta_{\frac{\pi}{2}} = 2\,\varepsilon_{ij}n_i t_j = 2\,\varepsilon_{nt}} \quad (14)$$

Soit en développant : $2\varepsilon_{ij}n_i t_j = 2[\varepsilon_{11}n_1t_1+\varepsilon_{22}n_2t_2+\varepsilon_{33}n_3t_3$

$+\varepsilon_{12}(n_1t_2+n_2t_1)+\varepsilon_{23}(n_2t_3+n_3t_2)$

$+\varepsilon_{13}(n_1t_3+n_3t_1)]$

Dans le cas où $\vec{n}$ est parallèle à l'axe Ox_1 et $\vec{t}$ parallèle à l'axe Ox_2

$$\vec{n}\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix} \qquad \vec{t}\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix} \qquad \boxed{2\varepsilon_{ij}n_i t_j = 2\varepsilon_{12} = \delta\theta\ (1,2)} \quad (15)$$

Il en est de même pour ε_{13} et ε_{23}. Ainsi les composantes non diagonales de ε_{ij} représentent les demi-variations d'angles initialement droits, de côtés parallèles aux axes de coordonnées soit par définition, les demi-distorsions. On les appelle déformations transversales ou de cisaillement.

IV.2.3.3. - Déformation d'un cube unitaire

Considérons un cube d'arête unité dont les arêtes sont parallèles aux trois axes Ox_1, Ox_2 et Ox_3 et son transformé (fig. 6).

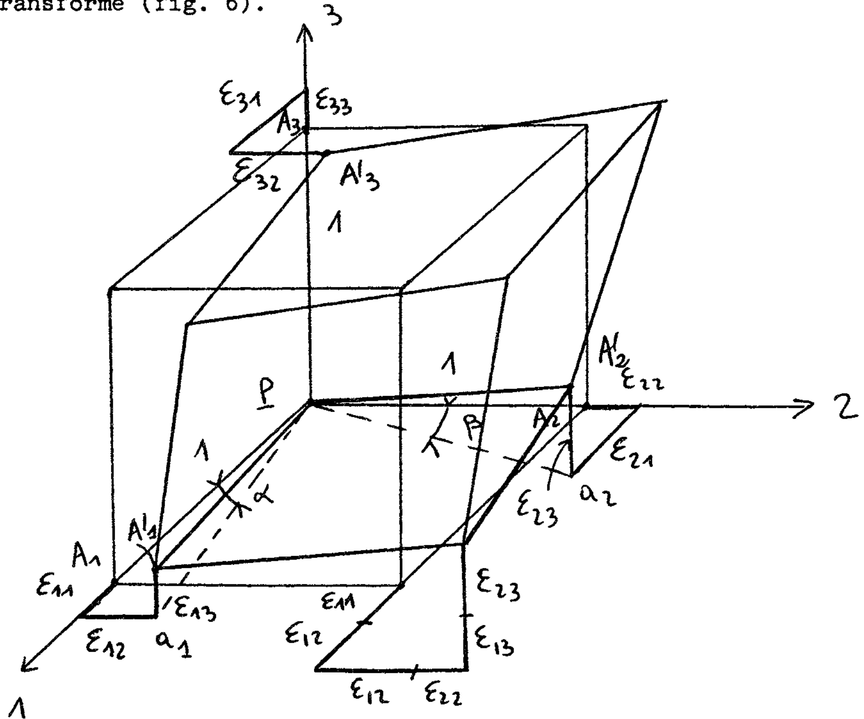


Figure 6

On a $[du] = [\varepsilon]\ [dx]$ $\qquad du_i = \varepsilon_{ij}\ dx_j$

$[du]$ étant le déplacement dû à la déformation uniquement.

Ainsi pour le point A_1 :

$$[\Delta_1] = [\varepsilon]\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\\varepsilon_{12}\\\varepsilon_{13}\end{bmatrix}$$

point A_2

$$[\Delta_2] = [\varepsilon]\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varepsilon_{21}\\\varepsilon_{22}\\\varepsilon_{23}\end{bmatrix}$$

point A_3 $$[\Delta_3] = [\varepsilon]\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varepsilon_{31}\\\varepsilon_{32}\\\varepsilon_{33}\end{bmatrix}$$

point de coordonnées (1,1,0) subit un déplacement :

$$[du] = \begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\\varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\\varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12}\\\varepsilon_{12}+\varepsilon_{22}\\\varepsilon_{13}+\varepsilon_{23}\end{bmatrix}$$

<u>Remarque 1</u> : <u>Déformation homogène</u>

Une déformation est dite homogène quand les e_{ij} (donc ε_{ij}) sont des constantes.

Dans ces conditions, on peut intègrer les relations (1) ; il vient :

$$u_i = (u_o)_i + e_{ij}x_j$$

$(u_o)_i$ étant le déplacement du point situé à l'origine.

Si on ne considère que la déformation pure :

$$u_i = \varepsilon_{ij} x_j$$

Une courbe $f(x_i) = 0$ devient après déformation $f(x'_i) = 0$ avec

$$x'_i = x_i + u_i = x_i + \varepsilon_{ij} x_j = (\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}) x_j$$

C'est une transformation linéaire. Par conséquent, durant la transformation, une droite reste une droite, un plan reste un plan, des droites ou plans parallèles restent parallèles, toutes les droites ayant la même direction sont dilatées ou contractées dans le même rapport. Les courbes ne changent pas de degré.

Remarque 2 :
Sur la figure 6, seuls sont représentés les déplacements u_i dus à la déformation pure. Les déplacements d'ensemble (translation et rotation) ne sont pas représentés.

a - Dilatation linéaire unitaire :
Elle est égale à (fig. 6) :

$$\frac{PA'_1 - PA_1}{PA_1} = \frac{\sqrt{(1+\varepsilon_{11})^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2} - 1}{1}$$

$$\simeq \frac{(1+2\varepsilon_{11})^{1/2} - 1}{1} \simeq \varepsilon_{11}$$

ε_{11} est la dilatation linéaire unitaire dans la direction 1
ε_{22} " " 2
ε_{33} " " 3
On retrouve évidemment les résultats du § IV.23.1.

b - Distorsion de l'angle droit (1,2)

$$\widehat{PA'_1, PA'_2} = \widehat{PA_1, PA_2} - \text{distorsion} \simeq \widehat{Pa_1, Pa_2}$$

$$\widehat{Pa_1, Pa_2} = \widehat{PA_1, PA_2} - (\alpha + \beta)$$

or $tg\alpha \simeq \alpha \simeq \frac{\varepsilon_{12}}{1+\varepsilon_{11}} \simeq \varepsilon_{12}(1-\varepsilon_{11}) \simeq \varepsilon_{12}$

$\beta \simeq tg\beta \simeq \varepsilon_{12}$

$\widehat{Pa_1, Pa_2} = \widehat{PA_1, PA_2} - 2\varepsilon_{12}$

Distorsion de l'angle droit (1,2) = $2\varepsilon_{12}$
De même " (2,3) = $2\varepsilon_{23}$
(1,3) = $2\varepsilon_{13}$

En résumé (fig. 7) :

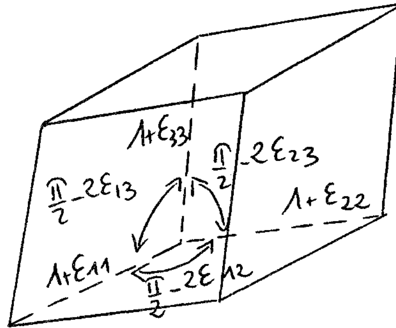


Figure 7

c - Dilatation cubique (ou volumique) unitaire

$\theta = \frac{V-V_o}{V_o}$ $V_o = 1$ $V = (\overrightarrow{PA'_1}, \overrightarrow{PA'_2}, \overrightarrow{PA'_3})$

V = produit mixte = $\overrightarrow{PA'_1} \cdot (\overrightarrow{PA'_2} \wedge \overrightarrow{PA'_3})$

$$V = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & 1+\varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & 1+\varepsilon_{33} \end{vmatrix} \simeq 1+\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33} = 1+\varepsilon_{ii}$$

si on se limite aux termes du premier ordre en ε_{ij}.

soit $\boxed{\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii} = \text{trace } \varepsilon_{ij} = I_1}$ (16)

I_1 étant l'invariant linéaire = div $\vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$

La dilatation cubique étant égale à la trace du tenseur des déformations (ou de celle du gradient du déplacement e_{ij}), il est évident que ce résultat est indépendant de la forme de l'élément de volume considéré et du système d'axes choisis.

<u>Remarque</u> : si on ne néglige pas les termes du second et troisième ordre en ε_{ij}, on a :

$$\theta = I_1 + I_2 + I_3$$

I_1, I_2 et I_3 étant respectivement les invariants linéaire, quadratique et cubique du tenseur ε_{ij}.
Ces invariants sont naturellement analogues à ceux définis pour le tenseur σ_{ij} (cf. § III.2.2. et § I.7).

IV.2.3.4. - Etat de déformation autour d'un point. Eléments principaux

Il y a analogie avec les contraintes (cf. § III.2). En un point P et dans la direction $\vec{n}$, on porte un vecteur PQ de longueur r (fig. 8).

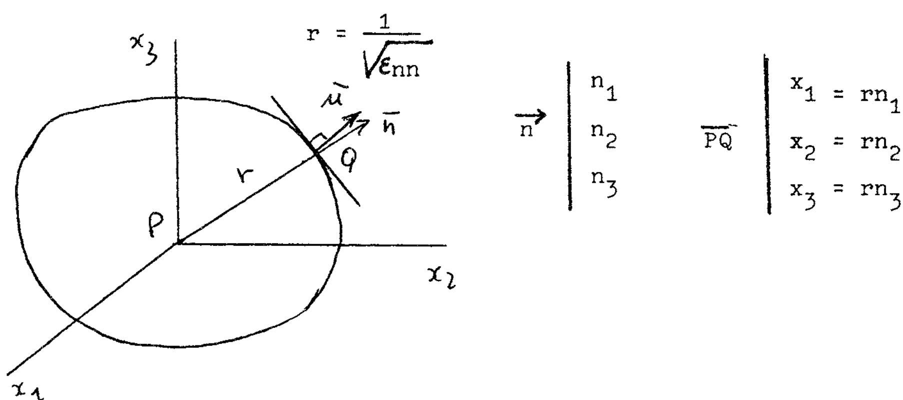


Figure 8

Le lieu géométrique de l'extrémité du vecteur $\overline{PQ}$ est donné par :

$$r^2 \varepsilon_{nn} = \pm 1$$

soit d'après la relation (IV.12)

$$\varepsilon_{11}x_1^2+\varepsilon_{22}x_2^2+\varepsilon_{33}x_3^2+2\varepsilon_{12}x_1x_2+2\varepsilon_{23}x_2x_3+2\varepsilon_{13}x_1x_3 = \pm 1 \quad (17)$$

Le lieu géométrique de Q est la quadrique représentative du tenseur des déformations : c'est la quadrique de Cauchy dont l'équation en notation indicielle est

$$\varepsilon_{ij}x_ix_j = \pm 1 \qquad (17)$$

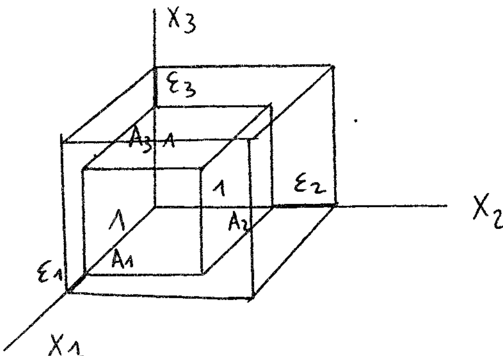
Rapportée à ses axes principaux, l'équation de la quadrique prend la forme :

$$\varepsilon_1 x_1^2 + {}_2x_2^2 + {}_3x_3^2 = \pm 1$$

Les demi-axes ont pour longueur $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}$, $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}}$, $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}}$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont les déformations principales
des déformations mutuellement orthogonales.
Par rapport aux axes principaux, le tenseur s'écrit :

$$\left[\varepsilon_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Dans ce système d'axes, les directions principales ne subissent pas de distorsion (fig. 9).



La signification des déformations principales est claire si on étudie un cube d'arête unité et dont les arêtes sont parallèles aux axes principaux.

Figure 9

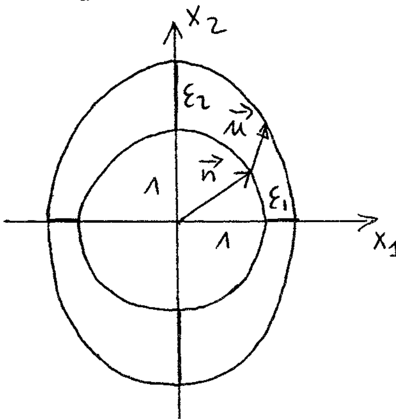
Pendant la déformation, les arêtes restent perpendiculaires ($\varepsilon_{ij} = 0 \quad i \neq j$) et leurs longueurs deviennent $1+\varepsilon_1$, $1+\varepsilon_2$, $1+\varepsilon_3$ ε_1, ε_2, ε_3 étant les dilatations linéaires dans les directions principales.

Remarque 1 : si on tient compte des déplacements d'ensemble (rotation et translation), les axes principaux de la déformation ne gardent pas leurs directions initiales pendant le déplacement (sauf si $\omega_{ij} = 0$) mais ils restent perpendiculaires durant la déformation.

Remarque 2 : la direction du vecteur déplacement $\vec{u}$ (dû à la déformation pure) est donnée par la construction du rayon normal à la quadrique de Cauchy (fig. 8).

$$u_i = \varepsilon_{ij}\, n_j$$

Ainsi une sphère unité se transforme en ellipsoïde par application de $[\varepsilon_{ij}]$ de demi-axes $1+\varepsilon_1$, $1+\varepsilon_2$, $1+\varepsilon_3$ (fig. 10).



En effet, l'équation de la sphère est $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

Après déformation, on a :

$$x'_1 = x_1(1+\varepsilon_1)$$
$$x'_2 = x_2(1+\varepsilon_2)$$
$$x'_3 = x_3(1+\varepsilon_3)$$

Soit

$$\frac{x'^2_1}{(1+\varepsilon_1)^2} + \frac{x'^2_2}{(1+\varepsilon_2)^2} + \frac{x'^2_3}{(1+\varepsilon_3)^2} = 1$$

Figure 10

Equation de l'ellipsoide des dilatations

<u>Remarque 3</u> : par rapport aux axes principaux, les équations (IV.12) et (IV.14) se simplifient :

$$\varepsilon_{nn} = \varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 n_3^2 \qquad (18)$$

$$\varepsilon_{nt} = \varepsilon_1 n_1 t_1 + \varepsilon_2 n_2 t_2 + \varepsilon_3 n_3 t_3 \qquad (19)$$

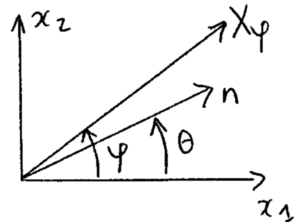
<u>Remarque 4</u> : si l'on connait une direction principale X_3, la recherche des éléments principaux du plan $X_1 X_2$ se fait comme pour les contraintes (§ III.2.4.) soit :

- par la méthode algébrique
- par la méthode graphique : cercles de Mohr

ε_{nn} est équivalent à σ_{nn}

τ_{nt} est équivalent à τ_{nt} ($\vec{n} \perp$ à $\vec{t}$)

Dans le plan (x_1, x_2), X_3 étant direction principale, on a :



$$\varepsilon_{nn} = \varepsilon_{11}\cos^2\theta + \varepsilon_{22}\sin^2\theta + 2\,\varepsilon_{12}\cos\theta\,\sin\theta$$

$$= \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2}\cos 2\theta + \varepsilon_{12}\sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{nt} = -\varepsilon_{11}\sin\theta\,\cos\theta + \varepsilon_{22}\sin\theta\cos\theta$$

$$+ \varepsilon_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= -\frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2}\sin 2\theta + \varepsilon_{12}\cos 2\theta$$

Les directions principales sont données par :

$\mathrm{tg}\, 2\varphi = \dfrac{2\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}$ $\quad \varepsilon_\varphi \geq \varepsilon_{\varphi'}$, $\quad \varphi$ est tel que $\cos 2\varphi$ est du signe de $\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}$ (voir § III.2.4)

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2} \frac{1}{\cos 2\varphi}$$

$$\varepsilon_{\varphi'} = \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2} - \frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2} \frac{1}{\cos 2\varphi} \qquad (20)$$

$$\varepsilon_{\varphi, \varphi'} = \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2 + 4\varepsilon_{12}^2}$$

Remarque 5 : Tenseur déviateur

De manière analogue au tenseur des contraintes (§ III.2.6), on peut décomposer le tenseur de formation ε_{ij} en la somme de deux tenseurs ε_{ij}^{d} et ε_{ij}^{S} avec

$$\varepsilon_{ij}^{S} = \begin{pmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_m = \frac{\varepsilon_{ii}}{3} = \text{déformation moyenne}$$

qui représente un état de déformation sphérique correspondant uniquement à un changement de volume sans distorsions et conservant l'isotropie du milieu.

$$\text{et} \quad \varepsilon_{ij}^{d} = \begin{pmatrix} \frac{2\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33}}{3} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \frac{2\varepsilon_{22}-\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{3} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \frac{2\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{3} \end{pmatrix} \qquad (21)$$

qui correspond au contraire à une déformation sans dilatation volumique mais avec distorsion ou cisaillement : ε_{ij}^{d} est appelé tenseur déviateur : (sa trace est nulle).

Par rapport aux axes principaux, on a :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{3} \end{pmatrix}$$

Une déformation quelconque peut être considérée comme la somme d'un état de déformation sphérique et d'un état de déformation sans changement de volume.

IV.3 - Formes particulières prises par le tenseur des déformations

a) Déformation plane et cisaillement pur

Le solide est dit en état de déformation plane si l'une des dilatations principales est nulle. Un cas particulier important est le cisaillement pur.

Dans le cas d'un cisaillement pur autour de Ox_3, ε_{ij} prend la forme

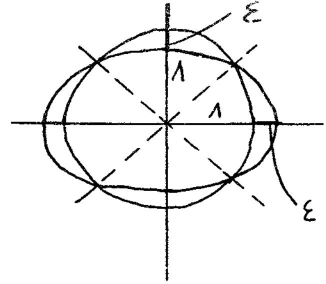
$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

qui rapporté à ses axes principaux par une rotation de 45° donne :

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La déformation de cisaillement pur correspond à la contrainte de cisaillement pur vue au chapitre précédent.

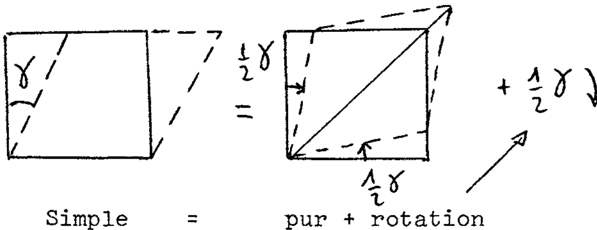
La construction du cercle de Mohr est identique. Dans ce type de déformation, la dilatation est nulle.



Déformation de cisaillement pur d'une sphère rayon unité.

b) Cisaillement simple

On appelle cisaillement simple la somme d'un cisaillement pur et d'une rotation.



Remarque 1 : Déformation non homogène

Les résultats précédents peuvent être généralisés aux déformations non homogènes. On considèrera alors une petite région où la contrainte est sensiblement homogène. On définit ainsi en chaque point les trois directions de déformations principales, variant en général d'un point à un autre. De même pour le quadrique de déformation dont la grandeur, la forme et l'orientation varient d'un point à un autre.

Remarque 2 :

La déformation d'un cristal ne forme pas l'une de ses propriétés physiques uniquement liée au cristal lui-même et en particulier à sa symétrie : elle constitue la réponse du cristal à une sollicitation mécanique (élasticité) ou électrique (piézoélectricité). La déformation produite par une contrainte mécanique ou un champ électrique n'a pas nécessairement la symétrie du cristal, à moins que la contrainte mécanique ou le champ ne possèdent eux-mêmes cette symétrie. La déformation résultant d'une variation de température (dilatation thermique) doit par contre être conforme à la symétrie cristalline.

IV.4 - Dilatation thermique

La déformation associée à une variation de température peut être représentée par le tenseur des déformations $[\varepsilon_{ij}]$. Pour une petite variation uniforme ΔT de la température, la déformation est homogène et les composantes de $[\varepsilon_{ij}]$ sont :

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij}\ \Delta T \qquad (11)$$

α_{ij} = constantes = coefficients de dilatation thermique

$[\varepsilon_{ij}]$ est un tenseur symétrique donc $[\alpha_{ij}]$ est aussi un tenseur symétrique, Si ce tenseur est rapporté à ses axes principaux, les équations (11) se simplifient :

$$\varepsilon_1 = \alpha_1\ \Delta T \qquad \varepsilon_2 = \alpha_2\ \Delta T \qquad \varepsilon_3 = \alpha_3\ \Delta T$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ étant les coefficients principaux de dilatation.

La dilatation thermique d'un cristal doit présenter la symétrie du cristal (principe de Neumann : les éléments de symétrie des propriétés physiques contiennent au moins ceux du groupe à centre du cristal). La dilatation thermique ne peut donc détruire aucun de ses éléments de symétrie (sauf dans le cas d'un changement de phase) : aussi la classe d'un cristal ne dépend pas de la température. Le coefficient volumique de dilatation thermique est α_{ii} ; c'est un invariant :

$$\Delta = \frac{\Delta V}{V_o} = \varepsilon_{ii} = \alpha_{ii}\ \Delta T \qquad (12)$$

Remarque : Au cours de ce chapitre, nous avons donné les composantes du tenseur déformations dans le système d'axes de coordonnées rectangulaires (système cartésien).

Dans l'annexe I, on trouvera la démonstration des expressions des composantes du tenseur déformation en coordonnées sphériques et cylindriques (ces deux systèmes étant très souvent utilisés pour résoudre les problèmes pratiques).